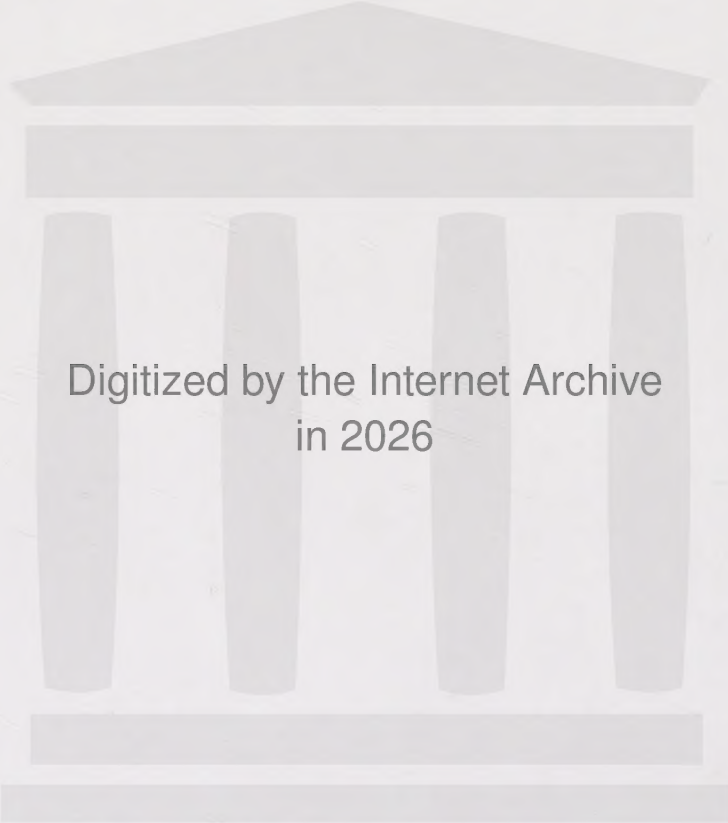


**Untersuchung der lokalen Struktur der
Wechselwirkungen im Rahmen von
Quark-Parton-Modellen**

Heinz Schneider

1980



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549007_0013

Untersuchung der lokalen Struktur der Wechselwirkungen
im Rahmen von Quark-Parton Modellen

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Heinz Schneider
München

München, den 4. Dezember 1979

1. Gutachter: Professor Dr. H.P. Dürr

2. Gutachter: Professor Dr. H. Fritzsch

Tag der mündlichen Prüfung: 8. März 1980



Zusammenfassung

Versucht man die Struktur der Materie mit ihren Wechselwirkungen aufzuklären, so sieht man, daß sich dazu im Bereich der Elementarteilchenphysik Streuexperimente bei hohen Impulsüberträgen eignen. Die vorliegende Arbeit untersucht nun die verschiedenen Methoden, mit deren Hilfe Aussagen über den Aufbau der Elementarteilchen, bzw. die Struktur der Ströme, mit deren Hilfe man die Wechselwirkungen beschreibt, erhalten werden können. Zu diesem Zweck werden einige der wichtigsten Ableitungen von Summenregeln und Relationen zwischen Strukturfunktionen nachvollzogen und auf die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit hin untersucht. Die abgeleiteten Relationen werden mit einer möglichst vollständigen Aufzählung der Bedingungen versehen, die für ihre Gültigkeit notwendig sind.

Eine Analyse der Experimente mit Hilfe der aufgeführten Summenregeln und Relationen zeigt, daß ein Partonbild, in dem die Partonen die Quantenzahlen der Quarks tragen, eine brauchbare Beschreibung der Daten liefert. Das gilt insbesondere für eine Erweiterung des Partonmodells durch Hinzunahme einer Wechselwirkung der Partonen untereinander durch Austausch von Eichteilchen (Gluonen), die an eine nichtabelsche Quantenzahl der Partonen (Color) ankoppeln sollen, wie es die sog. Quantenchromodynamik postuliert.

Eine genauere Betrachtung der Voraussetzungen, die durch die Relationen getestet werden, zeigt allerdings, daß auch andere Ladungszuordnungen für die Partonen, wie sie in Han-Nambu-artigen Modellen auftreten, imstande sind, die Daten zu beschreiben. Außerdem wird an Hand von Beispielen (tiefinelastische Streuung, Zerfall schwerer Mesonsysteme wie der ψ - bzw. der Y -Familie) gezeigt, daß in einer Reihe von Fällen an Stelle der durch die Quantenchromodynamik postulierten Color-SU(3) auch eine Color-SO(3) eine brauchbare Beschreibung der heute vorhandenen experimentellen Daten liefern kann. Der Zerfall von schweren $C = -1$ Mesonzuständen wird von den beiden Modellen dagegen unterschiedlich behandelt und führt für die SO(3) offenbar zu Schwierigkeiten.

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

II. Tiefinelastische Lepton-Nukleon-Streuung

- II.1 Kinematik und Strukturfunktionen
- II.2 Partonmodell
- II.3 Bjorken-Johnson-Low-Limes
- II.4 Operatorproduktentwicklung und Lichtkegelalgebra
- II.5 Die Momente von Strukturfunktionen und die Renormierungsgruppe
- II.6 Momente von Strukturfunktionen und Lichtkegelentwicklung
- II.7 Bedingung für die Gültigkeit von Summenregeln und Relationen zwischen Strukturfunktionen

III. Elektron-Positron-Vernichtung

- III.1 Kinematik
- III.2 Partonmodell
- III.3 Lichtkegelentwicklung
- III.4 Asymptotisches Verhalten von R und Renormierungsgruppe
- III.5 Methoden zum Vergleich von Theorie und Experiment
- III.6 Der Wert von R und die Vektormesonen

IV. Lepton-Paarerzeugung in hadronischen Reaktionen

- IV.1 Kinematik und hadronischer Tensor
- IV.2 Partonmodell
- IV.3 Lichtkegelanalyse

V. Experimentelle Auswertung

- V.1 Spin der Partonen
- V.2 Schwacher geladener Strom und Partonverteilung
- V.3 Ladung (Hyperladung) der Partonen
- V.4 Die Colorquantenzahl
- V.5 Skalenverletzung
- V.6 Der Zerfall schwerer Quarksysteme und die Anzahl der Gluonen

VI. Möglichkeiten einer vereinheitlichten Beschreibung der Wechselwirkungen

- VI.1 Komplexe Struktur im Lokalen
- VI.2 Einfache Struktur im Lokalen
- VI.3 Modell
- VI.4 Tiefinelastische Streuungen
- VI.5 Elektron-Positron-Paarvernichtung

Anhang

- A.1 Quarkmodelle
- A.2 Renormierungsgruppe und Hochenergieverhalten
- A.3 Fixpunkttheorien und anomale Dimensionen

I. Einleitung

Versucht man die Struktur der Materie mit ihren Wechselwirkungen aufzuklären, so sieht man sich heute mit einer enormen Anzahl von "Elementarteilchen" konfrontiert. Den weitaus größten Beitrag zur Zahl dieser Elementarteilchen liefern dabei die sogenannten Hadronen, Teilchen also, die als einzige der starken Wechselwirkung unterliegen. Die große Vielfalt der Hadronen zusammen mit ihrer ausgedehnten räumlichen Struktur und den offensichtlich vorhandenen Beziehungen zwischen ihren Quantenzahlen haben sehr bald dazu geführt, daß nach Substrukturen gesucht wurde, um mit ihrer Hilfe eine Vereinfachung der Beschreibung der Hadronen zu erzielen. Der bisher überzeugendste und erfolgreichste Versuch in dieser Richtung wurde 1964 von Gell-Mann und Zweig [I.1] unternommen. Nach ihren damaligen Vorstellungen kann man sich alle Hadronen aus nur drei verschiedenen Bausteinen zusammengesetzt vorstellen. Die Bausteine selbst, Quarks genannt, bilden in diesem Modell eine fundamentale Darstellung der $SU(3)$, wobei es sich nach heutiger Terminologie dabei um die Flavor $SU(3_f)$ handelt, im Gegensatz zur sogenannten Color $SU(3_c)$. Die Annahme, daß Hadronen Bindungszustände gewisser Quarks sind, hat sich bis heute bewährt, doch mußte die Zahl der dazu benötigten Quarks, und damit auch die entsprechende Symmetriegruppe, stark vergrößert werden. Es ist durchaus vorstellbar, daß auch in Zukunft eine mit der Energie wachsende Anzahl von Quarks benötigt wird, um die Fülle an Hadronen beschreiben zu können. Diese "Inflation" an Quark-Freiheitsgraden zusammen mit der Tatsache, daß bis heute noch keine Quarks als freie Teilchen beobachtet werden konnten, lassen mögliche Zweifel an der Fundamentalität des Quarkbegriffs aufkommen.

Eine andere Art von Substrukturen der Hadronen wurde 1969 auf Grund von Elektron-Nukleon-Streuversuchen bei hohen Impulsüberträgen [I.2] postuliert. Die Wirkungsquerschnitte nahmen nicht in dem Maße ab, wie man es der ausgedehnten Struktur der Hadronen entsprechend erwartet hatte. Für hohe Impulsüberträge wurden die Wirkungsquerschnitte vielmehr nahezu unabhängig von typisch hadronischen Massenmaßstäben und zeigten eine angenäherte Skalenunabhängigkeit. Diese Tatsache läßt sich als Folge einer Streuung an punktförmigen Substrukturen innerhalb des Hadrons, den sogenannten Partonen, interpretieren [I.3]. Eichwechselwirkungen bei hohen Impulsüberträgen testen die lokale Struktur der Hadronen.

Man kann nun den Versuch unternehmen, Partonen und Quarks miteinander zu identifizieren und ihnen somit auch dieselben Quantenzahlen zuzuschreiben. Während man die Quantenzahlen der Quarks aus denjenigen der Hadronen abzuleiten versucht, erhält man Aussagen über die Quantenzahlen der Partonen aus gewissen Summenregeln und Relationen, die man aus geeigneten Wirkungsquerschnitten ableiten kann.

Die vorliegende Arbeit untersucht nun die Methoden, mit deren Hilfe die Wechselwirkungen bei hohen Impulsüberträgen analysiert werden. Zu diesem Zweck werden einige der wichtigsten Ableitungen von Summenregeln und Relationen zwischen Strukturfunktionen nachvollzogen und auf die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit hin untersucht. Die abgeleiteten Relationen werden mit einer möglichst vollständigen Aufzählung der Bedingungen versehen, die für ihre Gültigkeit notwendig sind. Auf diese Weise erhalten die Aussagen über die Struktur der Ströme, die die Wechselwirkungen beschreiben, bzw. der Quantenzahlen der Partonen, ein verschiedenes Gewicht, je nach der Art der Voraussetzungen, die zur Gültigkeit der jeweiligen Relationen nötig sind, aus denen man die Aussagen ableitet. Außerdem lassen sich verschiedene Modelle besser mit dem Experiment vergleichen, wenn man die (möglichst) minimalen Annahmen kennt, die mit den verschiedenen Relationen getestet werden.

Die Untersuchung beschränkt sich bewußt auf totale Wirkungsquerschnitte und verzichtet auf die Analyse von Weiterentwicklungen des Partonbildes, wie sie z.B. zur Erklärung von 1-Teilchen-inklusive Reaktionen vorgenommen wurden. Die zusätzlichen Annahmen über die Bildung von Hadronen aus den gestreuten Partonen, die zur Analyse solcher Experimente nötig sind, ergeben wesentlich indirektere Hinweise auf die Quantenzahlen der Partonen durch das Experiment. Die Methode erscheint deshalb für eine grundsätzliche Analyse nicht recht geeignet.

Analysiert man nun die Experimente mit Hilfe der aufgeführten Summenregeln und Relationen, so zeigt es sich, daß ein Partonbild, in dem die Partonen die Quantenzahlen der Quarks tragen, eine brauchbare Beschreibung der Daten liefert. Das gilt besonders für die Erweiterung des Partonmodells durch Hinzunahme einer Wechselwirkung der Partonen untereinander, wie sie z.B. die sogenannte Quantenchromodynamik (QCD) [I.4] postuliert. Diese Wechselwirkung wird in dieser Theorie durch den Austausch von (masselosen) Vektorteilchen erzeugt, die an eine nichtabelsche Quantenzahl

(Color-SU(3_c)) der Partonen ankoppelt. Betrachtet man allerdings die aufgeführten Voraussetzungen genauer, die durch die Relationen getestet werden, so sieht man, daß auch Han-Nambu-artige Modelle I.5 mit ihren Erweiterungen durch Pati und Salam [I.6] oder Modelle, die eine von der normalerweise angenommenen SU(3_c)-Symmetrie der starken Wechselwirkung abweichende Struktur (z.B. SO(3_c)) aufweisen, im Stande sind, die Daten zu beschreiben.

Immerhin stellt die QCD eine selbstkonsistente Beschreibung dar, die noch keine ernsthaften Probleme bei der Erklärung experimenteller Daten zu verzeichnen hatte. Andere Theorien scheinen in Einzelfällen auf mehr oder weniger große Schwierigkeiten zu stoßen. Doch muß auch darauf hingewiesen werden, daß es ganze Gebiete gibt, auf die man keine Antwort aus einer Theorie wie der QCD erwarten kann. Dazu gehören Fragen wie die Massen von Hadronen oder Quarks, Größen von Kopplungskonstanten etc.

Die Arbeit hat folgenden Aufbau:

Kapitel II beschäftigt sich zunächst mit den theoretischen Analysen von tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuversuchen. Dazu enthält zunächst II.1 eine Darstellung der Kinematik und der Strukturfunktionen, mit deren Hilfe die Reaktionen untersucht werden. In II.2 wird das Partonmodell abgeleitet und die Relationen und Summenregeln für die Strukturfunktionen durch die Quantenzahlen der Partonen ausgedrückt. Die beiden folgenden Abschnitte enthalten eine etwas formale Behandlung der tiefinelastischen Streuung. So untersucht der Bjorken-Johnson-Low-Limes (II.3) die Entwicklung eines Kommutators in eine Reihe von gleichzeitigen Vertauschungsrelationen, während die Lichtkegelalgebra (II.4) den führenden Term in einer Operatorproduktentwicklung am Lichtkegel ($y^2 \rightarrow 0$) darstellt. Die so gewonnenen Ergebnisse erweisen sich als äquivalent zu denen aus dem Partonmodell [I.7], so daß der größeren Anschaulichkeit wegen der Vergleich zwischen Experiment und Theorie im Rahmen des Partonmodells geschieht (siehe V). Abschnitt (II.5) enthält den Zusammenhang zwischen Matrixelementen von Operatoren und Momenten von Strukturfunktionen. Dadurch wird II.6 vorbereitet, indem gezeigt wird, wie mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung Ergebnisse für das Hochenergieverhalten von Streuungen abgeleitet werden können, die über die reine Störungstheorie hinausgehen. II.7 enthält

schließlich eine Zusammenfassung der in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Summenregeln und Relationen. Dabei wurde, wie bereits erwähnt, besonderes Gewicht auf die Aufzählung der Voraussetzungen gelegt, die für die Gültigkeit der entsprechenden Aussagen nötig sind.

Während sich Kapitel II mit tiefinelastischen Reaktionen und somit mit raumartigen Impulsüberträgen ($q^2 < 0$) beschäftigt, werden in Kapitel III ($e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$) Aussagen über die Struktur der Hadronen für zeitartige ($q^2 > 0$) Impulsüberträge abgeleitet. Auch hier zeigt es sich, daß Lichtkegelentwicklung und Partonmodell eng miteinander verknüpft sind.

Als Beispiel für eine Reaktion, bei der Partonmodell und Lichtkegelentwicklung nicht mehr zu identischen Resultaten führen, wird in Kapitel IV die Lepton-Paarherzeugung in hadronischen Reaktionen ($h_1 h_2 \rightarrow l \bar{l} X$) behandelt.

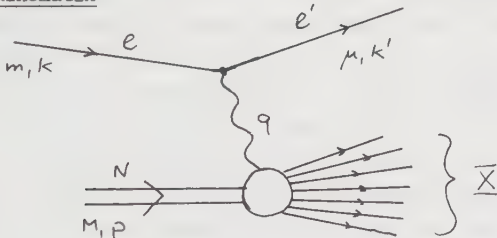
Kapitel V schließlich enthält einen Vergleich zwischen den in den vorhergegangenen Kapiteln abgeleiteten Relationen und dem Experiment. Dabei werden die Quantenzahlen der Partonen ermittelt und somit ihre Identifizierung mit den Quarks überprüft. Abschnitt V.6 über den Zerfall schwerer Quarksysteme wurde dabei eingefügt, um zusätzliche Informationen über die Gruppenstruktur der starken Wechselwirkung erhalten zu können.

Kapitel VI geht über die Ermittlung der Quantenzahlen der Partonen und die Klärung der Voraussetzungen, die zu diesem Zweck erfüllt sein müssen, hinaus. Das Kapitel beschäftigt sich mit den Versuchen einer vereinheitlichten Beschreibung der uns bekannten Wechselwirkungen und der dafür meist postulierten Zunahme an Freiheitsgraden mit Symmetrien. Angeregt durch den Versuch von H.P. Dürr und H. Saller, die Vielfalt der Freiheitsgrade als niederenergetische Folge einer möglichst kleinen ($SU(2)$), spontan gebrochenen Symmetriegruppe zu verstehen, werden mögliche Konsequenzen untersucht, die sich aus diesem Konzept für die schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen ergeben könnten. Es scheint nämlich die Möglichkeit zu bestehen, die $U(1)$ des $SU(2) \times U(1)$ Weinberg-Salam-Modells [I.8] als niederenergetische Folge der gebrochenen $SU(2)$ Symmetrie zu verstehen [I.9]. In diesem Falle wäre die $U(1)$ Symmetrie nicht lokal implementiert und würde für sehr hohe Energien keine Rolle mehr spielen.

II. Tiefinelastische Lepton-Nukleon-Streuung $lN \rightarrow l'X$

II.1. Kinematik und Strukturfunktionen [II.1.1]

II.1.1. Kinematik



E, m, K_μ Energie, Masse und Impuls des einlaufenden Leptons

E', μ, K'_μ Energie, Masse und Impuls des auslaufenden Leptons

M, p_μ Masse und Impuls des Targets (Nukleons)

$q_\mu = K_\mu - K'_\mu$ Impuls des ausgetauschten Teilchens

$$Q^2 = -q^2$$

$\nu = pq = M(E - E')$ Maß für den Energieübertrag

$x = \frac{Q^2}{2pq}$ Bjorkens Skalenvariable

$y = \frac{E - E'}{E} = \frac{q_0}{E} = \frac{pq}{pK}$ relativer Energieübertrag

Die dimensionslosen Größen x und y haben noch eine weitere anschauliche Bedeutung. Wegen

$$y \approx \frac{1}{2} (1 - \cos \Theta_{cn}) = \sin^2 \left(\frac{\Theta_{cn}}{2} \right) \quad (\text{II.1.1})$$

bedeutet $y = 0$ Vorwärtsstreuung im Schwerpunktsystem, während $y = 1$ der Rückwärtsstreuung entspricht. Für die quadrierte Masse des hadronischen Endzustandes gilt

$$M_X^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2MEy(1 - x) \quad (\text{II.1.2})$$

so daß $x = 0$ eine maximal inelastische Streuung, $x = 1$ jedoch eine elastische Streuung beschreibt. Soviel zur Definition der Variablen.

II.1.2. Ein-Teilchen-Austausch-Näherung

Die Streuung von Leptonen an Hadronen wird in niedrigster Näherung durch den Austausch eines virtuellen Teilchens beschrieben. Im Falle der elektromagnetischen Streuung handelt es sich bei diesem Teilchen um das Photon, und der Prozeß wird durch die sogenannte Quantenelektrodynamik [II.1.2.] , kurz QED, beschrieben. Die Gültigkeit dieser Theorie wurde z.B. bei rein leptonischen Streuungen, wie $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ untersucht. Dabei konnten im Rahmen der Meßgenauigkeit keine Abweichungen von den theoretischen Vorhersagen festgestellt werden [II.1.3.] . Der von der QED herrührende Anteil des Prozesses kann deshalb als bekannt vorausgesetzt werden. Beiträge höherer Ordnung, wie der 2 Photonaustausch, sind um einen Faktor $\approx \alpha$ kleiner und liegen somit höchstens im Prozentbereich. Man kann sie vernachlässigen.

Die schwache Wechselwirkung erfolgt im Rahmen renormierbarer Theorien durch den Austausch massiver Vektorbosonen, die allgemein W^+ und Z^0 genannt werden [II.1.4.] . Bei den heute erreichbaren Neutrinoenergien von bis zu 200 GeV konnte die Existenz dieser Teilchen noch nicht festgestellt werden [II.1.5.] ("Propagatoreffekt"). Die Wechselwirkung läßt sich deshalb als effektive Strom-Strom-Kopplung auffassen, was einer unendlichen Masse der Vektorbosonen bei festgehaltener Fermikonstante G entsprechen würde. Höhere Ordnungen in der schwachen Wechselwirkung sind um mehrere Zehnerpotenzen kleiner als der führende Term und können deshalb völlig ignoriert werden.

II.1.3. Leptonischer und hadronischer Tensor

Die Beschreibung des Streuprozesses durch ein ausgetauschtes Teilchen führt auf folgende Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts

$$\begin{aligned}
 d\sigma &\propto \sum_X \delta^4(p+k-p_X-k') \left| \langle e^- | J_\mu^e(0) | e^- \rangle D^{\mu\nu}(q^2) \langle X | J_\nu^h(0) | N \rangle \right|^2 \\
 &= \sum_X \delta^4(p+k-p_X-k') \mathcal{L}_{\mu\nu}^e D^{\mu\nu}(q^2) D^{*\lambda\lambda'}(q^2) W_{\lambda\lambda'}
 \end{aligned}
 \tag{II.1.3}$$

Die $D^{\mu s}$, $D^{\nu \lambda}$ sind die Propagatoren des ausgetauschten Teilchens und die Tensoren $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ bzw. $W_{\mu\nu}$ entstehen durch Quadrieren der entsprechenden Matrixelemente der Ströme.

Der leptonische Tensor $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ läßt sich in niedrigster Näherung elektromagnetischer bzw. schwacher Wechselwirkung leicht angeben

a) elektromagnetische Streuung $e^+N \rightarrow e^+\bar{X}$ bzw. $\mu^+N \rightarrow \mu^+\bar{X}$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = 4 [k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} (kk' - m^2)] \quad (\text{II.1.4a})$$

b) schwache Wechselwirkung (geladen) $\bar{\nu}_e N \rightarrow e^+\bar{X}$ bzw. $\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+\bar{X}$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = 4 [k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} (kk') + 2i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k'^\alpha k^\beta] \quad (\text{II.1.4b})$$

c) schwache Wechselwirkung (ungeladen) $\bar{\nu}_e N \rightarrow \bar{\nu}_e \bar{X}$ bzw. $\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \bar{\nu}_\mu \bar{X}$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = 4 [k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} (kk') + 2i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k'^\alpha k^\beta] \quad (\text{II.1.4c})$$

Da hier generell nur die Streuung zwischen unpolarisierten Teilchen betrachtet werden soll, treten weder bei $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ noch bei $W_{\mu\nu}$ Spinfreiheitsgrade auf, da über sie jeweils gemittelt bzw. summiert werden muß.

Für die schwachen Wechselwirkungen wurde jeweils eine V-A Kopplung der Ströme an das ausgetauschte Teilchen angenommen. V steht dabei für Vektor und A für Axialvektor. Außerdem wurde die Neutrinomasse $m_\nu = 0$ gesetzt. Diese Annahmen beschreiben die Experimente innerhalb der heutigen Energiebereiche recht gut [II.1.6]. Für höhere Energien könnte sich das jedoch als falsch herausstellen, und es gibt auch eine Reihe von Theorien, in denen sowohl Massen für (möglicherweise neue) Neutrinos, als auch V+A Kopplungen für die Ströme eingeführt werden [II.1.7]. Doch konnten experimentelle Anzeichen für solche Erweiterungen [II.1.8.] durch neuere Versuche nicht bestätigt werden [II.1.9.] .

Der schwache neutrale Strom besitzt nach heutiger Kenntnis zwar eine Mischung von V-A und V+A Kopplungen an das neutrale Vektorboson, doch sorgt die Zweikomponentigkeit des Neutrinos dafür, daß bei Neutrino-Streuung nur der V-A Anteil beiträgt.

Der hadronische Tensor $W_{\mu\nu}$ ist in dem Maße unbekannt, wie eine vollständige Beschreibung der starken Wechselwirkung heute noch aussteht. Eine solche Beschreibung scheint sich in den letzten Jahren im Rahmen der sogenannten Quantenchromodynamik (QCD) [II.1.10] in bestimmten kinematischen Bereichen anzubahnen, doch ist sie weit davon entfernt eine umfassende Theorie der starken Wechselwirkung zu sein und muß durch eine Reihe von Zusatzannahmen ergänzt werden (z.B. durch das sogenannte "confinement" [II.1.11.], also durch die Forderung, daß freie Quarks nicht auftreten können.

Der hadronische Tensor ist jedenfalls durch

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{ab}(\rho, q) &= \frac{1}{4\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p + k - p_X - k') \langle N | J_\mu^a(0) | X \rangle \langle X | J_\nu^b(0) | N \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle N | J_\mu^a(y) J_\nu^b(0) | N \rangle \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle N | [J_\mu^a(y), J_\nu^b(0)] | N \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.5})$$

gegeben. Die Indizes a, b stehen dabei für innere Quantenzahlen. Die Ersetzung des Produktes der Ströme durch ihren Kommutator ist aus folgendem Grund zulässig: Wie (II.1.5) zeigt, entspricht die Reihenfolge $J_\mu^a(y) J_\nu^b(0)$ der Ströme einer Energie des hadronischen Endzustandes X von $E_X = E_N + q_0$, also einer Energieaufnahme des Targets bei der Streuung. Analog kann man zeigen, daß $J_\nu^b(0) J_\mu^a(y)$ einem $E_X = E_N - q_0$ und somit einer Energieabgabe entspricht. Da aber das Nukleonsystem das energetisch leichteste System mit Baryonenzahl darstellt und diese Quantenzahl erhalten ist, kann dieser Fall nicht auftreten. Das entsprechende Matrixelement ist ≈ 0 und die Ersetzung damit gerechtfertigt.

Die Definition von $W_{\mu\nu}$ mit Hilfe des Kommutators bringt Vorteile, da dieser oft besser bekannt ist, als das Produkt. Das gilt beispielsweise dann, wenn einer der Operatoren mit dem Generator einer Symmetrietransformation verknüpft ist.

Neben $W_{\mu\nu}^{ab}$ wird noch eine weitere Größe definiert

$$T_{\mu\nu}^{ab}(\rho, q) = i \int d^4y e^{iqy} \langle N | T^* (J_\mu^a(y) J_\nu^b(0)) | N \rangle \quad (\text{II.1.6})$$

T^* ist dabei diejenige Zeitordnungsvorschrift, die $T_{\mu\nu}$ zu einer Lorentz-kovarianten Größe macht. Sie unterscheidet sich im allgemeinen durch

$\delta^q(x)$ -artige Terme und deren Ableitungen von dem naiven T-Produkt ("seagull" Term [II.1.12]). Solche Terme erzeugen bei der Fouriertransformation Polynome in p und q. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{ab}(p, q) &= P_{\mu\nu}^{ab}(p, q) + i \int d^4y e^{iqy} \langle N | \theta(y_0) J_\mu^a(y) J_\nu^b(0) + \theta(-y_0) J_\nu^b(0) J_\mu^a(y) | N \rangle \\ &\approx P_{\mu\nu}^{ab}(p, q) + i \int d^4y e^{iqy} \theta(y_0) \langle N | [J_\mu^a(y), J_\nu^b(0)] | N \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.1.7})$$

mit reellem Polynom $P_{\mu\nu}^{ab}$. Die Verwendung des Kommutators ist aus denselben Gründen erlaubt wie in (II.1.5).

II.1.4. Lorentzstruktur der $T_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}$ und Erhaltungssätze

Üblicherweise zerlegt man $T_{\mu\nu}^{ab}$ und $W_{\mu\nu}^{ab}$ gemäß ihrer Lorentzstruktur in

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{ab}(p, q) &= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) T_1^{ab}(v, q^2) + \frac{1}{H^2} \left(p_\mu - \frac{v}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{v}{q^2} q_\nu\right) T_2^{ab}(v, q^2) \\ &\quad - \frac{i}{2H^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} p^\lambda q^\gamma T_3^{ab}(v, q^2) \\ &\quad + \frac{q_\mu q_\nu}{H^2} T_4^{ab}(v, q^2) + \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{2H^2} T_5^{ab}(v, q^2) + \frac{i}{2H^2} (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) T_6^{ab}(v, q^2) \end{aligned} \quad (\text{II.1.8})$$

Eine entsprechende Zerlegung gilt für $W_{\mu\nu}^{ab}$, wobei die T_i^{ab} durch W_i^{ab} zu ersetzen sind.

Für Wechselwirkungen, die invariant unter Zeitumkehr sind, gilt $T_6 = W_6 = 0$. Da eine Verletzung der T-Invarianz bis heute nur im $K^0/\bar{K}^0$ -System beobachtet werden konnte [II.1.13], soll im folgenden stets $T_6 = W_6 = 0$ vorausgesetzt werden. Koppelt die Wechselwirkung an erhaltene Ströme, wie es beispielsweise in der QED der Fall ist, so gilt wegen

$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0$, daß $W_4 = W_5 = T_4 = T_5 = 0$. Ist die Wechselwirkung außerdem noch paritätserhaltend, so ist auch $W_3 = T_3 = 0$. W_3 stellt ein Maß für die Paritätsverletzung dar.

Die elektromagnetische Streuung unpolarisierter Teilchen wird also durch 2 Strukturfunktionen W_1, W_2 beschrieben. Dies entspricht der Freiheit, daß das ausgetauschte virtuelle Photon longitudinal oder transversal polarisiert sein kann. Die Wirkungsquerschnitte für virtuelle Photonstreuung lassen sich bei Verwendung der Hand'schen Flußdefinition [II.1.14] nämlich schreiben als

$$\begin{aligned}\sigma_T(\nu, Q^2) &= \frac{4\pi^2\alpha}{K} W_1(\nu, Q^2) \\ \sigma_L(\nu, Q^2) &= \frac{4\pi^2\alpha}{K} \left[\left(1 + \frac{\nu^2}{K^2 Q^2}\right) W_2(\nu, Q^2) - W_1(\nu, Q^2) \right] \quad (\text{II.1.9}) \\ K &= \nu - \frac{1}{2} Q^2\end{aligned}$$

Im Falle der schwachen Wechselwirkung hat man sowohl Paritätsverletzung als auch Kopplung an nichterhaltene Ströme. Deshalb werden hier alle Strukturfunktionen $W_1, \dots, W_5$ beitragen. W_4 und W_5 treten aber mit Faktoren q_μ bzw. q_ν versehen auf. Wegen $q^\mu j_{\mu S} \hat{=} \partial^\mu j_{\mu S} = 2im j_S$ erwartet man deshalb, daß ihre Beiträge zum Wirkungsquerschnitt durch Faktoren $\left(\frac{m^2}{Q^2}\right)$ relativ zu W_1, W_2 und W_3 unterdrückt sind (siehe (II.1.18)). Die schwache Wechselwirkung bei hohen Impulsüberträgen wird also durch drei Strukturfunktionen W_1, W_2, W_3 beschrieben.

II.1.5. Relationen zwischen den Strukturfunktionen

Es sollen nun einige Relationen für die Strukturfunktionen angegeben werden. Zunächst die sogenannten "crossing" Relationen, die aus der Ersetzung $q_\mu \rightarrow -q_\mu$ in (II.1.5) folgen

$$\begin{aligned}W_{1,2,3,4}^{ab}(\nu, Q^2) &= -W_{1,2,3,4}^{ba}(-\nu, Q^2) \\ W_5^{ab}(\nu, Q^2) &= W_5^{ba}(-\nu, Q^2)\end{aligned} \quad (\text{II.1.10})$$

Die Positivität der Wirkungsquerschnitte fordert

$$0 \leq \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\nu^2 + K^2 Q^2} |W_3| \leq W_1 \leq \left(1 + \frac{\nu^2}{K^2 Q^2}\right) W_2 \quad (\text{II.1.11})$$

Desweiteren liest man den aus den Definitionen (II.1.5) und (II.1.7) direkt folgenden Zusammenhang zwischen den T_i und den W_i ab

$$W_i^{ab}(\nu, Q^2) = \frac{1}{2\pi} \text{Im } T_i^{ab}(\nu, Q^2) \quad (\text{II.1.12})$$

Das bedeutet, daß zwischen diesen Größen eine Dispersionsrelation besteht

$$T_i^{ab}(v, Q^2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{w_i^{ab}(v', Q^2)}{v' - v - i\varepsilon} + \sum_{n=0}^{\infty} v^n B_{n,i}^{ab}(Q^2) \quad (II.1.13)$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}Q^2}^{\infty} dv' \left[\frac{w_i^{ab}(v', Q^2)}{v' - v - i\varepsilon} + \frac{w_i^{ba}(v', Q^2)}{v' + v + i\varepsilon} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} v^n B_{n,i}^{ab}(Q^2)$$

Dabei wurde (II.1.10) benutzt, um das Integral nur über den physikalisch meßbaren Bereich $v > \frac{1}{2}Q^2$ erstrecken zu müssen. Das Pluszeichen in der Klammer gilt für $i = 1, 2, 3, 4$ und das Minuszeichen für $i = 5$. Das Polynom in v ist reell und wird im allgemeinen vorhanden sein, unabhängig von möglicherweise benötigten Subtraktionen, die das Integral endlich machen sollen [II.1.15]. Aus Regge-Theorie-Überlegungen erwartet man dabei, daß W_2 und W_3 unsubtrahierten Dispersionsrelationen, also (II.1.13) genügen, während für W_1 zwei Subtraktionen nötig sind [II.1.16]

$$T_1^{ab}(v, Q^2) = v C_1^{ab}(Q^2) + T_1^{ab}(0, Q^2) + 2v \int_{\frac{1}{2}Q^2}^{\infty} \frac{dv'}{(v')^2} \left[\frac{w_1^{ab}(v', Q^2)}{v' - v - i\varepsilon} + \frac{w_1^{ba}(v', Q^2)}{v' + v + i\varepsilon} \right] + \sum_{n=2}^{\infty} v^n B_{n,1}^{ab}(Q^2) \quad (II.1.13a)$$

Zum Abschluß soll noch die sogenannte Ladungssymmetrie-Beziehung angeführt werden

$$W_i^{vp}(v, Q^2) = W_i^{\bar{v}n}(v, Q^2) \quad (II.1.14)$$

$$W_i^{\bar{v}p}(v, Q^2) = W_i^{vn}(v, Q^2)$$

Sie folgt aus der Annahme, daß bei einer Isospinrotation von 180° um die I_2 -Achse sowohl die Ströme $J_\mu^\pm$, die Neutrino- bzw. Antineutrino-Streuungen beschreiben, als auch Proton- und Neutronzustände jeweils ineinander übergehen

$$e^{i\pi I_2} J_\mu^\pm(y) e^{-i\pi I_2} = -J_\mu^\mp(y) \quad (II.1.15)$$

$$e^{i\pi I_2} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -p \end{pmatrix}$$

(II.1.15) läßt sich auch als Spezialfall aus der von Feynmann und Gell-Mann [II.1.17] aufgestellten sogenannten CVC- ("conserved vector current") Hypothese ableiten. Dabei ist die Bezeichnung CVC etwas ungenau und sollte besser Hypothese des Isotriplett-Vektorstroms heißen. Danach sind die Vektoranteile der geladenen schwachen Ströme $J_\mu^\pm$ und der Isektoranteil des elektromagnetischen Stromes die $I_3 = \pm 1$ und $I_3 = 0$ Komponenten eines Isovektors. Die Eigenschaften von $J_\mu^\pm$ unter Isospinrotation (II.1.15) folgen daraus sofort als Spezialfall. Schließlich muß noch angenommen werden, daß das Nukleonsystem ein Isodoublett bezüglich dieses "schwachen" Isospins ist.

II.1.6. Skalenhypothese und Wirkungsquerschnitte

Motiviert durch die Skalenhypothese von Bjorken [II.1.18], daß im Limes $\nu \rightarrow \infty$, $Q^2 \rightarrow \infty$, $x = \frac{Q^2}{2\nu}$ festgehalten (Bjorken Limes), dimensionslose Größen nur noch von (der dimensionslosen Größe) x und nicht auch noch von weiteren Massenskalen abhängen werden, benutzt man meist die folgenden dimensionslosen Strukturfunktionen

$$F_1(x, Q^2) = W_1(\nu, Q^2) \quad (II.1.16)$$

$$F_{2,3,4,5}(x, Q^2) = \frac{\nu}{M_2} W_{2,3,4,5}(\nu, Q^2)$$

Die Skalenhypothese besagt somit, daß die $F_i(x, Q^2)$ im Bjorkenlimes unabhängig von Q^2 werden.

$$F_i(x, Q^2) \xrightarrow[\substack{Q^2 \rightarrow \infty \\ x \text{ fest}}]{\nu \rightarrow \infty} \hat{F}_i(x) \quad (II.1.17)$$

Mit Hilfe dieser Strukturfunktionen lassen sich die Wirkungsquerschnitte folgendermaßen ausdrücken

(a) elektromagnetische Streuung $e^\pm N \rightarrow e^\pm X, \mu^\pm N \rightarrow \mu^\pm X$

$$\frac{\alpha^2 e^2}{4\pi x y} = \frac{8\pi\alpha^2}{Q^4} \left(\frac{E^2}{E^2 - m_e^2} \right) (\hbar E) \left[\left(xy^2 - \frac{m^2}{\hbar E} y \right) F_1^e(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{\hbar}{2E} xy \right) F_2^e(x, Q^2) \right] \quad (II.1.18a)$$

(b) Neutrino/Antineutrino Streuung (geladene Ströme) $\vec{\nu}_e N \rightarrow e^+ \bar{X}$, $\vec{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+ \bar{X}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dx dy} = & \frac{G^2}{\pi} \left(\frac{M_W^2}{M_W^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[\left(x y^2 + \frac{\mu^2}{4\pi E} - \frac{\mu^4}{8\pi^2 E^2 x} \right) F_1^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) + \left(1 - y + \frac{\pi}{2E} x y - \frac{\mu^2}{2\pi E x} - \frac{\mu^2}{4E^2} + \frac{\mu^2}{8\pi E y} \right) F_2^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) \right. \\ & + x y \left(1 - \frac{1}{2} y - \frac{\mu^2}{2\pi E x y} \right) F_3^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) \\ & \left. + \frac{\mu^2}{2\pi E} \left(x y + \frac{\mu^2}{2\pi E} \right) F_4^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) - \frac{\mu^2}{2\pi E} F_5^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \quad (\text{II.1.18b}) \end{aligned}$$

(c) Neutrino/Antineutrino Streuung (neutrale Ströme) $\vec{\nu}_e N \rightarrow \vec{\nu}_e \bar{X}$, $\vec{\nu}_\mu N \rightarrow \vec{\nu}_\mu \bar{X}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dx dy} = & \frac{G^2}{\pi} \left(\frac{M_Z^2}{M_Z^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[x y^2 \tilde{F}_1^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) + \left(1 - y + \frac{\pi}{2E} x y \right) \tilde{F}_2^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) \right. \\ & \left. + x y \left(1 - \frac{1}{2} y \right) \tilde{F}_3^{\nu/\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \quad (\text{II.1.18c}) \end{aligned}$$

Für Strahlenenergien von $E \gtrsim 10 \text{ GeV}$ und $Q^2 \gtrsim 2 \text{ GeV}^2$ sind Terme wie $\frac{m^2}{ME}$ und $\frac{\mu^2}{2mEx} = \frac{\mu^2}{Q^2} y$ alle $O(10^{-3})$ und somit vernachlässigbar. Damit fallen, wie bereits angedeutet, F_4 und F_5 fort. Andererseits gilt $\frac{M}{2E} xy \lesssim 5 \cdot 10^{-2}$ und dieser Term wird für niedrige Energien möglicherweise berücksichtigt werden müssen.

Abschließend sollen die Wirkungsquerschnitte für hohe Energien E nochmals in ihrer vereinfachten Form angegeben werden. Dabei ist es oft nützlich, eine etwas andere Kombination von Strukturfunktionen zu verwenden

$$\begin{aligned} F_5(x, Q^2) &= F_2(x, Q^2) - 2x F_1(x, Q^2) \\ \bar{F}_L(x, Q^2) &= 2x F_1(x, Q^2) - x F_3(x, Q^2) \\ F_R(x, Q^2) &= 2x F_1(x, Q^2) + x F_3(x, Q^2) \end{aligned} \quad (\text{II.1.19})$$

$F_S(x, Q^2)$ ist im Bjorkenlimes gemäß (II.1.9) ein Maß für die Kopplung an longitudinale Bosonen. $F_L(x, Q^2)$ und $F_R(x, Q^2)$ geben für Spin $\frac{1}{2}$ Konstituenten die Stärke der Kopplung an V-A bzw. V+A Ströme an, wie man aus den entsprechenden Formeln im Rahmen des Partonmodells (Tabelle 2) sieht. Doch nun zu den Wirkungsquerschnitten

(a) elektromagnetisch $e^+N \rightarrow e^+X$, $\mu^+N \rightarrow \mu^+X$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy} &= \frac{8\pi\alpha^2}{Q^4} (\pi E) \left[x y^2 F_1^e(x, Q^2) + (1-y) F_2^e(x, Q^2) \right] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} (\pi E) \left\{ [1 + (1-y)^2] (F_L^e(x, Q^2) + F_R^e(x, Q^2)) + 2(1-y) F_S^e(x, Q^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.1.20a})$$

(b) schwach geladen $(\bar{\nu}_e^-)N \rightarrow e^{(\pm)}X$, $(\bar{\nu}_\mu^-)N \rightarrow \mu^{(\pm)}X$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\nu\bar{\nu}}}{dx dy} &= \frac{G^2}{\pi} \left(\frac{M_W^2}{M_W^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[x y^2 F_1^{\nu\bar{\nu}}(x, Q^2) + (1-y) F_2^{\nu\bar{\nu}}(x, Q^2) + x y (1 - \frac{1}{2}y) F_3^{\nu\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \\ \frac{d^2\sigma^{\nu}}{dx dy} &= \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{M_W^2}{M_W^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[F_L^{\nu}(x, Q^2) + (1-y)^2 F_R^{\nu}(x, Q^2) + 2(1-y) F_S^{\nu}(x, Q^2) \right] \\ \frac{d^2\sigma^{\bar{\nu}}}{dx dy} &= \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{M_W^2}{M_W^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[(1-y)^2 F_L^{\bar{\nu}}(x, Q^2) + F_R^{\bar{\nu}}(x, Q^2) + 2(1-y) F_S^{\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.1.20b})$$

(c) schwach neutral $(\bar{\nu}_e^-)N \rightarrow (\bar{\nu}_e^-)X$, $(\bar{\nu}_\mu^-)N \rightarrow (\bar{\nu}_\mu^-)X$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\nu\bar{\nu}}}{dx dy} &= \frac{G^2}{\pi} \left(\frac{M_Z^2}{M_Z^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[x y^2 \tilde{F}_1^{\nu\bar{\nu}}(x, Q^2) + (1-y) \tilde{F}_2^{\nu\bar{\nu}}(x, Q^2) + x y (1 - \frac{1}{2}y) \tilde{F}_3^{\nu\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \\ \frac{d^2\sigma^{\nu}}{dx dy} &= \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{M_Z^2}{M_Z^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[\tilde{F}_L^{\nu}(x, Q^2) + (1-y)^2 \tilde{F}_R^{\nu}(x, Q^2) + 2(1-y) \tilde{F}_S^{\nu}(x, Q^2) \right] \\ \frac{d^2\sigma^{\bar{\nu}}}{dx dy} &= \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{M_Z^2}{M_Z^2 + Q^2} \right)^2 (\pi E) \left[(1-y)^2 \tilde{F}_L^{\bar{\nu}}(x, Q^2) + \tilde{F}_R^{\bar{\nu}}(x, Q^2) + 2(1-y) \tilde{F}_S^{\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.1.20c})$$

Im Rahmen von Modellen lassen sich nun Aussagen über die Strukturfunktionen gewinnen, die man dann mit den Experimenten vergleichen kann. Im folgenden sollen einige dieser Methoden vorgestellt werden.

II.2. Das Partonmodell [II.2.1]

II.2.1. Grundidee

Die einfachste und anschaulichste Beschreibung tief inelastischer Streuvorgänge wird durch das sogenannte Partonmodell geliefert, das deshalb an erster Stelle beschrieben werden soll. In diesem Modell bestehen die Hadronen aus punktförmigen Objekten, genannt Partonen, die unter dem Einfluß der starken Wechselwirkung die bekannte, ausgedehnte Struktur der Hadronen erzeugen. Erfolgt nun ein Streuvorgang während einer Zeitdauer, die kurz ist gegenüber der charakteristischen Zeitskala für starke Wechselwirkungen, so erscheint diese Wechselwirkung während des Streuprozesses praktisch ausgeschaltet. Man kann dann hoffen, daß der Streuvorgang an einem einzelnen Konstituent stattgefunden hat und nicht am gesamten Hadron. Um zu zeigen, daß dieses "Einfrieren" der Partonverteilung möglich ist, soll der Prozeß im Lepton-Hadron-Schwerpunktsystem betrachtet werden



Es gilt

$$\begin{aligned}
 K_\mu &= (\sqrt{p^2 + m^2}, 0, p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (p, 0, p) \\
 P_\mu &= (\sqrt{p^2 + m^2}, 0, -p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (p, 0, -p)
 \end{aligned}
 \tag{II.2.1}$$

Für den Impuls des ausgetauschten Bosons erhält man mit etwas Rechnerei

$$\begin{aligned}
 q_\mu &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} (yP, |q_\perp| \approx 2P \frac{\sqrt{4y(1-x-y)}}{1-x}, y \frac{1+x}{1-x} P) = O(P) \\
 y &= \frac{Pq}{PK} = \text{konstant} \\
 x &= \frac{Q^2}{2Pq} = \text{konstant}
 \end{aligned}
 \tag{II.2.2}$$

Bei der Berechnung des hadronischen Tensors $W_{\mu\nu}$ (II.1.5)

$$W_{\mu\nu}^{ab}(p, q) = \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle N | J_\mu^a(z) J_\nu^b(0) | N \rangle
 \tag{II.2.3}$$

wird nun das Matricelement der Ströme mit dem Phasenfaktor $\exp[iqz]$ gewichtet. Dieser Ausdruck stellt wegen $q = O(P)$ im Limes $P \rightarrow \infty$ eine immer schneller mit z oszillierende Funktion dar. Für genügend glatte y -Abhängigkeit des Matricelementes werden sich deshalb die Beiträge für größere Werte von z wegheben ("Lebesgue'sche Säge"). Der dominante Beitrag zum Integral sollte deshalb von einem Gebiet mit

$$z_\mu = O\left(\frac{1}{P}\right) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} 0
 \tag{II.2.4}$$

stammen. Das virtuelle Boson wird also mit dem Hadron während einer Zeitdauer

$$\Delta t \approx z_0 = O\left(\frac{1}{P}\right) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} 0
 \tag{II.2.5}$$

in Wechselwirkung treten. Ist diese Zeitdauer kürzer als die für die starke Wechselwirkung charakteristische Zeitskala, so scheint die Partonverteilung im Hadron während des Streuvorganges praktisch eingefroren zu sein (Impulsapproximation).

II.2.2 Abteilung des Partonmodells

Die Ableitung des Partonmodells geschieht meist auf nicht manifest kovariante Weise unter Verwendung des Hamiltonformalismus [II.2.2].

Dazu wird die volle Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ der starken Wechselwirkung in einen freien Anteil $\mathcal{H}_0$ und einen Wechselwirkungsterm $\mathcal{H}_I$ zerlegt.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \quad (\text{II.2.6})$$

Mit Hilfe von $\mathcal{H}_I$ läßt sich formal ein Anzugsoperator $U(t)$ definieren, der eine Transformation zwischen Heisenberg- und Wechselwirkungsbild bewirkt.

$$U(t) = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^t \mathcal{H}_I(\tau) d\tau \right) \right] \quad (\text{II.2.7})$$

T symbolisiert dabei die Zeitordnung des nachfolgenden Produktes. Der Operator $U(t)$ gestattet es nun, den vollen hadronischen Strom $j_\mu^a(y)$ durch den mit Hilfe von $\mathcal{H}_0$ aus den Konstituenten gebildeten Strom $j_\mu^a(y)$ auszu-
drücken.

$$j_\mu^a(y) = U^{-1}(t) j_\mu^a(y) U(t) \quad (\text{II.2.8})$$

Der Index a steht dabei für mögliche innere Quantenzahlen. Ausgedrückt durch nackte Felder hat $j_\mu^a(y)$ eine sehr einfache Form. So lautet der elektromagnetische Strom für Spin $S = 0$ und $S = \frac{1}{2}$ Konstituenten

$$j_\mu^{\text{elm}}(y) = i \sum_{S=0} e_k : \phi_k^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_k : (y) + \sum_{S=\frac{1}{2}} e_e : \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e : (y) \quad (\text{II.2.9})$$

Unter Verwendung von $U(t)$ nimmt der hadronische Tensor die Form

$$W_{\mu\nu}^{ab}(p, q) = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4y e^{iqy} e^{i(p_N - p_X)y} \langle uN | j_\mu^a(0) | uX \rangle \langle uX | j_\nu^b(0) | uN \rangle \quad (\text{II.2.10})$$

an, mit der aus der Störungstheorie bekannten Entwicklung

$$\begin{aligned} |uN\rangle &= \sqrt{Z} \left[|N\rangle + \sum_{m \neq N} \frac{\langle m | \mathcal{H}_I | N \rangle}{E_N - E_m} |m\rangle + \sum_{n, m \neq N} \frac{\langle m | \mathcal{H}_I | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_I | N \rangle}{(E_N - E_m)(E_N - E_n)} |m\rangle + \dots \right] \\ &=: \sum_m a_m |m\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.2.11})$$

und einem analogen Ausdruck für $|u\bar{X}\rangle$.

Bei den eingeschobenen Zwischenzuständen handelt es sich stets um reelle Zustände, die auf ihren Massenschalen liegen. Virtuelle Zustände kommen nicht vor. Als Folge davon gilt an den Vertizes zwar Impuls-,

nicht aber notwendigerweise auch Energieerhaltung. Deshalb lässt sich

$\exp[i(\rho_N - \rho_X)y]$ nicht mehr dazu benutzen $j_\mu^a(0)$ in $j_\mu^a(y)$ umzuformen, da im allgemeinen $E_N \neq E_{UN}$ und $E_X \neq E_{UX}$ sein wird.

Angenäherte Energieerhaltung

Um zu sehen, unter welchen Bedingungen eine angenäherte Energieerhaltung zu erwarten ist, also $E_N \simeq E_{UN}$ bzw. $E_X \simeq E_{UX}$ gilt, soll als einfaches Beispiel ein Zustand $|1,2\rangle \in |UN\rangle$ betrachtet werden mit

$$\begin{aligned} p_N &= (E_N, 0, p) = (\sqrt{M^2 + p^2}, 0, p) \\ p_1 &= (E_1, p_\perp, xp) = (\sqrt{m_1^2 + x^2 p^2 + p_\perp^2}, p_\perp, xp) \quad (\text{II.2.12}) \\ p_2 &= (E_2, -p_\perp, (1-x)p) = (\sqrt{m_2^2 + (1-x)^2 p^2 + p_\perp^2}, -p_\perp, (1-x)p) \end{aligned}$$

Im Limes $p \rightarrow \infty$ ("infinite momentum frame") erhält man daraus für die Energien

$$\begin{aligned} E_N &= \sqrt{M^2 + p^2} = p + \frac{M^2}{2p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ E_1 &= \sqrt{m_1^2 + x^2 p^2 + p_\perp^2} = |x| p + \frac{m_1^2 + p_\perp^2}{2|x|p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ E_2 &= \sqrt{m_2^2 + (1-x)^2 p^2 + p_\perp^2} = |1-x| p + \frac{m_2^2 + p_\perp^2}{2|1-x|p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.2.13})$$

Somit erhält man eine näherungsweise Energieerhaltung

$$E_N - (E_1 + E_2) = O\left(\frac{1}{p}\right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{II.2.14})$$

falls

$$|x| + |1-x| = 1 \quad \text{also} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{II.2.15})$$

und p_T^2 beschränkt.

Die Bedingung an x stellt keine starke Forderung dar. Für Werte von x außerhalb dieses Bereichs wird der Energienenner = 0(P) und man erwartet deshalb, daß solche Zwischenzustände im Limes keinen Beitrag liefern. Im Grenzfall werden also nur solche Zwischenzustände beitragen, bei denen alle Konstituenten in dieselbe Richtung wie das ursprüngliche Hadron fliegen.

Die Beschränkung der Transversalimpulse p_T stellt eine drastische Forderung dar. In einer störungstheoretischen Behandlung von Feldtheorien erhält man nie beschränkte Transversalimpulse. Andererseits hängt die Frage von mittleren Transversalimpulsen eng mit dem Bindungsproblem zusammen, so daß eine Beantwortung dieser Frage auf störungstheoretischem Niveau eigentlich nicht zu erwarten ist. Hier soll einfach die Beschränkung von Transversalimpulsen angenommen werden. Das kann beispielsweise wie bei Drell, Levy und Yan durch Einführung eines ad-hoc "cut-off" für Transversalimpulse geschehen [II.2.2].

Tiefinelastische Streuung als inkoherente Summe von Partonstreuungen.

Unter diesen Annahmen kann (II.2.10) weiter umgeformt werden zu

$$W_{\mu\nu}^{ab}(p, q) \approx \frac{1}{4\pi} \int d\gamma e^{iq\gamma} \langle uN | j_\mu^\alpha(\gamma) j_\nu^b(0) | uN \rangle \quad (\text{II.2.16})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n} a_m a_n^* \int d\gamma e^{iq\gamma} \langle n | j_\mu^\alpha(\gamma) j_\nu^b(0) | m \rangle$$

oder diagrammatisch ausgedrückt

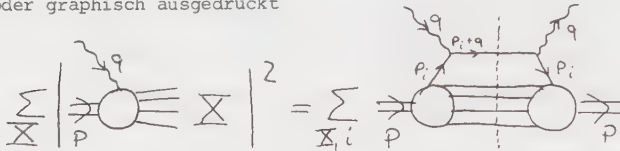
$$\sum_i \left| \text{Diagram}_i \right|^2 = \sum_i \left| \text{Diagram}_i \right|^2 = \sum_i \text{Diagram}_i + \sum_{i,j} \text{Diagram}_{ij} \quad (\text{II.2.17})$$

Vom zweiten Term in (II.2.17) erwartet man, daß er für $p \rightarrow \infty$ nichts beiträgt. In nichtrelativistischen Modellen läßt sich dies zeigen. Für den relativistischen Fall stellt dies eine Zusatzannahme dar. Anschaulich gesprochen, liegt der Grund dafür in der Tatsache, daß für den zweiten Beitrag der Relativimpuls der betrachteten Partonen mit steigendem Impulsübertrag q_μ des ausgetauschten Bosons anwächst - im Gegensatz zum ersten Term. Für Bindungszustände müssen solche Situationen jedoch unterdrückt

werden, da sie das Aufbrechen des Bindungszustandes bedeuten würden. Man erhält also endgültig

$$W_{\mu\nu}^{ab}(p, q) \approx \sum_m |\alpha_m|^2 \sum_{i \in m} W_{\mu\nu}^{(i)ab}(p_i, q) \quad (\text{II.2.18})$$

oder graphisch ausgedrückt



$$\left| \sum_m \left[\text{Hadron}(p) \text{ interacting with } q \right] \right|^2 = \sum_i \left[\text{Parton}(p_i) \text{ interacting with } q \right] \quad (\text{II.2.19})$$

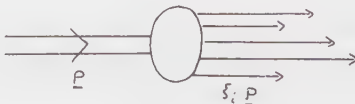
Der Streuprozess kann also unter den zuvor gemachten Näherungen als inkohärente Summe von Comptonstreuungen an freien Partonen beschrieben werden.

II.2.3. Partonverteilungsfunktionen und Strukturfunktionen

Nach (II.2.18) setzt sich der hadronische Tensor zusammen aus einem hadronischen Tensor $W_{\mu\nu}^{(i)}(p_i, q)$, der die elementare Partonwechselwirkung mit dem virtuellen Boson beschreibt und einem Anteil, gegeben durch $|\alpha_m|^2$, der die Verteilung der Partonen im Hadron angibt. Für die elektromagnetische Streuung an Spin $s = \frac{1}{2}$ Partonen gilt beispielsweise

$$W_{\mu\nu}^{i, \text{elem}}(p_i, q) = \frac{1}{4} e_i^2 \text{Trace} \left[(\not{p}_i + m_i) \gamma_\mu (\not{p}_i + \not{q} + m_i) \gamma_\nu \right] \theta(p_{i0} + q_0) \delta((p_i + q)^2 - m_i^2) \quad (\text{II.2.20})$$

Trägt das Parton den Bruchteil ξ_i des Gesamtimpulses des



Hadrons, also $(p_i)_3 = \xi_i P_3$ so gilt für $P \rightarrow \infty$ folgende Vereinfachung

$$(p_i)_\mu = \left(\sqrt{\xi_i^2 P_3^2 + p_{\perp}^2 + m_i^2}, p_{\perp}, \xi_i P_3 \right)_{P \rightarrow \infty} \approx \xi_i p_\mu + \dots \quad (\text{II.2.21})$$

Als Verteilungsfunktion für die Partonen im Hadron definiert man

$$\begin{aligned}
 N(x) &= x \sum_m \sum_{i \in m} |a_m|^2 \delta(x - \xi_i) \\
 &= x \sum_m \int \frac{\alpha \xi_i}{\xi_i} |a_m|^2 \delta(x - \xi_i) \quad (\text{II.2.22}) \\
 &= \sum_m |a_m|^2_{\xi_i=x}
 \end{aligned}$$

so daß $N(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, im Hadron ein Parton mit Impuls p_i zwischen $xp \leq p_i \leq (x+dx)p$ zu finden. Für Partonen mit unterschiedlichen Quantenzahlen muß man für jede Sorte von Partonen ein entsprechendes $N^a(x)$ definieren.

Mit Hilfe dieser Festsetzung und der Näherung (II.2.21) erhält man für Spin $S = 0$, $S = \frac{1}{2}$ und $S = 1$ Partonen folgende Ausdrücke für die Strukturfunktionen F_1 , F_2 und F_3 (siehe (II.1.16)) bzw. F_S , F_L und F_R (siehe (II.1.19)).

a) elektromagnetische Streuung

Tabelle 1:

Spin	$S = 0$	$S = \frac{1}{2}$	$S = 1, m \neq 0$
$F_1(x, Q^2)$	0	$\frac{1}{2} \sum e_i^2 N_i(x)$	$\frac{1}{3} \sum e_i^2 \left(1 + \frac{Q^2}{4m_i^2}\right) N_i(x)$
$F_2(x, Q^2)$	$x \sum e_i^2 N_i(x)$	$x \sum e_i^2 N_i(x)$	$x \sum e_i^2 \left(1 + \frac{Q^2}{6m_i^2}\right) N_i(x)$
$F_3(x, Q^2)$	0	0	0
$F_S(x, Q^2)$	$x \sum e_i^2 N_i(x)$	0	$\frac{2}{3} x \sum e_i^2 N_i(x)$
$F_L(x, Q^2)$	0	$x \sum e_i^2 N_i(x)$	$\frac{2}{3} x \sum e_i^2 \left(1 + \frac{Q^2}{4m_i^2}\right) N_i(x)$
$F_R(x, Q^2)$	0	$x \sum e_i^2 N_i(x)$	$\frac{2}{3} x \sum e_i^2 \left(1 + \frac{Q^2}{4m_i^2}\right) N_i(x)$

b) schwache, geladene Wechselwirkung

Tabelle 2:

Spin	S = 0	S = $\frac{1}{2}$	S = 1, m $\neq$ 0
$F_1^{v\bar{v}}(x, Q^2)$	0	$\sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] N_i(x)$	$\sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] \left[\frac{Q^2}{2m_i^2} + \frac{1}{4} + \frac{4m_i^2}{3Q^2} \right] N_i(x)$
$F_2^{v\bar{v}}(x, Q^2)$	$x \sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] N_i(x)$	$2x \sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] N_i(x)$	$x \sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] \left[\frac{Q^2}{2m_i^2} + \frac{5}{12} \right] N_i(x)$
$F_3^{v\bar{v}}(x, Q^2)$	0	$2 \sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i) - \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i)] N_i(x)$	$\sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] \left[\frac{Q^2}{2m_i^2} + \frac{1}{6} \right] N_i(x)$
$F_5^{v\bar{v}}(x, Q^2)$	$x \sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] N_i(x)$	0	$x \sum_i [\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i)] \left[\frac{1}{4} - \frac{m_i^2}{Q^2} \right] N_i(x)$
$F_7^{v\bar{v}}(x, Q^2)$	0	$4x \sum_i \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) N_i(x)$	$x \sum_i \left[\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) \left(\frac{Q^2}{8m_i^2} + \frac{2}{3} + \frac{8m_i^2}{3Q^2} \right) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i) \left(\frac{Q^2}{24m_i^2} + \frac{1}{3} + \frac{8m_i^2}{3Q^2} \right) \right] N_i(x)$
$F_8^{v\bar{v}}(x, Q^2)$	0	$4x \sum_i \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i) N_i(x)$	$x \sum_i \left[\lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_L^i) \left(\frac{Q^2}{24m_i^2} + \frac{1}{3} + \frac{8m_i^2}{3Q^2} \right) + \lambda^{\bar{v}}(\bar{I}_R^i) \left(\frac{Q^2}{8m_i^2} + \frac{2}{3} + \frac{8m_i^2}{3Q^2} \right) \right] N_i(x)$

$$\lambda^{\bar{v}}(I) = \bar{I}(I+1) - \bar{I}_3^2 \mp \bar{I}_3$$

1) Wegen der $\frac{1}{m^2}$ Terme muß hier an Stelle von $F_5(x, Q^2) = F_2(x, Q^2) - 2x F_7(x, Q^2)$ die genauere Formel $F_5(x, Q^2) = \left(1 + \frac{4x^2 m^2}{Q^2}\right) F_2(x, Q^2) - 2x F_7(x, Q^2)$ für die Kopplung an longitudinale Bosonen verwendet werden (siehe (II.1.9)).

Dabei wurde die Abkürzung

$$\lambda^{\mp}(I) = I(I+1) - I_3^2 \mp I_3 \quad (\text{II.2.23})$$

benutzt.

Bemerkungen und Erläuterungen zu den Strukturfunktionen

Für die elektromagnetische Streuung wurde stets minimale Kopplung an das Photon angenommen. Einführung anomaler magnetischer Momente für die Partonen etc. würde das Ergebnis ändern.

Für die V-A bzw. V+A Kopplung in der schwachen Wechselwirkung an die geladenen Bosonen wurde eine SU(2) mit Quantenzahlen (I_L, I_R) angenommen. Man sollte dabei beachten, daß für Teilchen mit den Quantenzahlen (I_L, I_R) die zugehörigen Antiteilchen (I_R, I_L) als Quantenzahlen besitzen.

Vektorpartonen führen hier zu expliziter Skalenverletzung durch $\frac{\hbar^2}{m^2}$ Terme. Durch Einführung zusätzlicher Kopplungen [II.2.3] und/oder zusätzlicher Eichteilchen [II.2.4] läßt sich dieses Verhalten umgehen.

Mit spinlosen Teilchen läßt sich in einfacher Weise (1- Teilchen-Strom) keine Paritätsverletzung erzeugen, deshalb gilt $F_3 \equiv 0$. Spin $S = 1$ Partonen erlauben neben einem Vektorstrom $j_\mu \sim F_{\mu\nu} A^\nu$ auch einen Axialvektorstrom $j_{\mu 5} \sim \tilde{F}_{\mu\nu} A^\nu$ mit $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$, der jedoch nicht in üblicher Weise aus einer Nötherkonstruktion folgt. Hier wurde naiv $j_\mu \mp j_{\mu 5}$ für die V+A Ströme verwandt.

Strukturfunktionen im Rahmen einer SU(2)xU(1) und die Ladungssymmetrie

Gemäß der CVC Hypothese von Feynmann und Gell-Mann [II.2.5] bilden die Vektoranteile der geladenen schwachen Ströme und der Isospinanteil des elektromagnetischen Stroms die verschiedenen Komponenten eines einzigen Isektors. Die elektromagnetische Ladung läßt sich somit durch den schwachen Isospin und einen Isosinglett-Anteil, die schwache Hyperladung, ausdrücken. Hier soll, in Anlehnung an die Tabellen 1 und 2 der Strukturfunktionen für die schwache Wechselwirkung, für die Kopplung der V-A und V+A Ströme ein I_L, I_R für den Isospin und ein Y_L, Y_R für die Hyperladung eingeführt werden. Die Paritätserhaltung der elektromagnetischen Wechselwirkung führt dabei auf folgende Einschränkung in der Wahl der Quantenzahlen für ein gegebenes Parton

$$e^i = \frac{1}{2} Y_L^i + \bar{I}_{3L}^i = \frac{1}{2} Y_R^i + \bar{I}_{3R}^i \quad (\text{II.2.24})$$

Die Gültigkeit der Ladungssymmetrie $W_1^p = W_1^n$ etc. (II.1.14) fordert, daß Proton und Neutron bei einer Isospinrotation $e^{i\pi I_2}$ ineinander übergehen. Das bedeutet, daß

$$N^{\text{Proton}}(\bar{I}_L, \bar{I}_{3L}, Y_L, \bar{I}_R, \bar{I}_{3R}, Y_R; x) = N^{\text{Neutron}}(\bar{I}_L, -\bar{I}_{3L}, Y_L, \bar{I}_R, -\bar{I}_{3R}, Y_R; x) \quad (\text{II.2.25})$$

gelten sollte. Für allgemeine Multipllettzuordnungen wird man durch $I_{3L} \rightarrow -I_{3L}$ und $I_{3R} \rightarrow -I_{3R}$ jedoch auf kein wohldefiniertes Teilchen geführt, da dann gelten müßte (II.2.24)

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} Y_L + \bar{I}_{3L} = \frac{1}{2} Y_R + \bar{I}_{3R} \\ e_2 &= \frac{1}{2} Y_L - \bar{I}_{3L} = \frac{1}{2} Y_R - \bar{I}_{3R} \end{aligned} \right\} \text{ also } \left\{ \begin{aligned} \bar{I}_{3L} &= \bar{I}_{3R} \\ Y_L &= Y_R \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.26})$$

Eine andere Möglichkeit besteht in

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} Y_L + \bar{I}_{3L} = \frac{1}{2} Y_R \\ e_2 &= \frac{1}{2} Y_L - \bar{I}_{3L} = \frac{1}{2} Y_R' \end{aligned} \right\} \text{ also } Y_R' = Y_R - 2\bar{I}_{3L} \quad (\text{II.2.27})$$

Die cvc Hypothese führt also nur dann zur Ladungssymmetrie, falls alle Teilchen entweder im gleichen Multipllett bezüglich V-A und V+A sind, oder falls sie bezüglich einer der beiden Kopplungen ein Isosinglett darstellen. Das soll im folgenden stets angenommen werden.

Unter diesen Voraussetzungen sollen für Spin $s = \frac{1}{2}$ Partonen Kombinationen von Strukturfunktionen nochmals angegeben werden. Die Quantenzahlen beziehen sich dabei auf die Teilchen, nicht die Antiteilchen und die Verteilungsfunktionen N_1 und $\bar{N}_1$ sind diejenigen der Partonen im Proton. Die $\bar{N}_1$ stellen die entsprechenden Verteilungsfunktionen für die Antipartonen im Proton dar.

$$\begin{aligned}
 F_1^{\rho\rho}(x, Q^2) + F_1^{\eta\eta}(x, Q^2) &= \sum_i \left[\frac{1}{4} (\gamma_L^i)^2 + (\bar{I}_{3L}^i)^2 \right] [N_i(x) + \bar{N}_i(x)] \\
 F_1^{\rho\rho}(x, Q^2) - F_1^{\eta\eta}(x, Q^2) &= \sum_i \left[\gamma_L^i \bar{I}_{3L}^i \right] [N_i(x) + \bar{N}_i(x)] \\
 F_1^{\nu\rho}(x, Q^2) + F_1^{\nu\eta}(x, Q^2) &= 2 \sum_i \left[\left(\bar{I}_L^i (\bar{I}_L^i + 1) - (\bar{I}_{3L}^i)^2 \right) + \left(\bar{I}_R^i (\bar{I}_R^i + 1) - (\bar{I}_{3R}^i)^2 \right) \right] [N_i(x) + \bar{N}_i(x)] \\
 &\quad (II.2.28) \\
 F_1^{\nu\rho}(x, Q^2) - F_1^{\nu\eta}(x, Q^2) &= -2 \sum_i (\bar{I}_{3L}^i + \bar{I}_{3R}^i) [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] \\
 F_3^{\nu\rho}(x, Q^2) + F_3^{\nu\eta}(x, Q^2) &= -4 \sum_i \left[\left(\bar{I}_L^i (\bar{I}_L^i + 1) - (\bar{I}_{3L}^i)^2 \right) - \left(\bar{I}_R^i (\bar{I}_R^i + 1) - (\bar{I}_{3R}^i)^2 \right) \right] [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] \\
 F_3^{\nu\rho}(x, Q^2) - F_3^{\nu\eta}(x, Q^2) &= 4 \sum_i (\bar{I}_{3L}^i - \bar{I}_{3R}^i) [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]
 \end{aligned}$$

$$F_2(x, Q^2) = 2x F_1(x, Q^2)$$

$$F_i^{\nu\rho}(x, Q^2) = F_i^{\bar{\nu}\eta}(x, Q^2)$$

$$F_i^{\nu\eta}(x, Q^2) = F_i^{\bar{\nu}\rho}(x, Q^2)$$

Normierungsbedingungen an die Partonverteilungsfunktionen

Da im Partonmodell die Hadronen aus den Konstituenten aufgebaut sind, müssen diese auch die Quantenzahlen der Hadronen unter sich aufteilen. Aus "starkem" Isospin, Baryonenzahl, Strangeness, Charm etc folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_i dx \bar{I}_3^i [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] &= \bar{I}_3(p) = \frac{1}{2} \\
 \sum_i dx B^i [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] &= B(p) = 1 \\
 \sum_i dx S^i [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] &= S(p) = 0 \\
 \sum_i dx C^i [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] &= C(p) = 0
 \end{aligned}
 \quad (II.2.29)$$

Man beachte, daß die Normierungsbedingungen entsprechend den Quantenzahlen aus der starken Wechselwirkung erfolgen. Für Gell-Mann-Zweig-Quarks (siehe Anhang A.1) erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned}\int dx [u(x) - \bar{u}(x)] &= 2 \\ \int dx [\alpha(x) - \bar{\alpha}(x)] &= 1 \\ \int dx [s(x) - \bar{s}(x)] &= 0 \\ \int dx [c(x) - \bar{c}(x)] &= 0\end{aligned}\tag{II.2.30a}$$

Zum Vergleich sollen auch die Verhältnisse für ein Sakata-artiges Modell angegeben werden

$$\begin{aligned}\int dx [\rho(x) - \bar{\rho}(x)] &= 1 \\ \int dx [n(x) - \bar{n}(x)] &= 0 \\ \int dx [\lambda(x) - \bar{\lambda}(x)] &= 0 \\ \int dx [C(x) - \bar{C}(x)] &= 0\end{aligned}\tag{II.2.30b}$$

Schließlich folgt unabhängig vom speziellen Modell noch eine Bedingung aus der Energie-Impuls-Erhaltung

$$\sum_i \int dx \times [N_i(x) + \bar{N}_i(x)] = 1 - \epsilon \leq 1\tag{II.2.31}$$

da die Partonen auch die Energie und den Impuls des Hadrons tragen müssen.

$\epsilon > 0$ stellt den Fall dar, daß in (II.2.31) nur experimentell bestimmte Partonverteilungen eingesetzt werden, es aber Partonen im Hadron gibt, die weder an die schwache noch die elektromagnetische Wechselwirkung ankoppeln (im Rahmen der QCD z.B. die Gluonen, die die starke Wechselwirkung vermitteln sollen).

II.2.4 Bestimmung der Eigenschaften der Partonen

a) Zusammenhang zwischen $R = \sigma_L / \sigma_T$ und dem Spin der Partonen

Das Verhältnis R von longitudinalem zu transversalem Wirkungsquerschnitt ergibt sich nach (II.1.9) zu

$$\begin{aligned} R(x, Q^2) &= \frac{\sigma_L(x, Q^2)}{\sigma_T(x, Q^2)} = \frac{(1 + \frac{4x^2 m^2}{Q^2}) F_2(x, Q^2) - 2x F_1(x, Q^2)}{2x F_1(x, Q^2)} \\ &= \frac{F_2(x, Q^2)}{2x F_1(x, Q^2)} + O\left(\frac{1}{Q^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.2.32})$$

Wie man aus (II.2.23) und (II.2.24) sieht, gilt

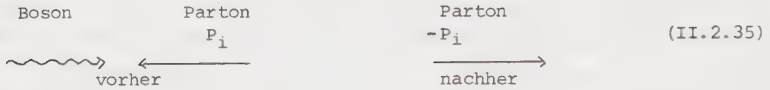
$$\begin{aligned} F_1(x, Q^2) &= 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \\ F_2(x, Q^2) &= 0 \quad \text{für} \quad s = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.2.33})$$

so daß

$$R(x, Q^2) \xrightarrow[\substack{\text{Bjorken} \\ \text{Limes}}]{\substack{Q^2 \rightarrow \infty \\ x \text{ fest}}} \begin{cases} \infty & s = 0 \\ 0 & s = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{II.2.34})$$

$F_2(x, Q^2) = 0$ für Spin $s = \frac{1}{2}$ wird als Callan-Groß Relation bezeichnet [II.2.6]. Der führende, skalenbrechende Term, erfüllt auch für $s = 1$ Partonen diese Relation.

Es gibt einen anschaulichen Grund für (II.2.33). Im Breitensystem ~~sieht~~ der Streuvorgang folgendermaßen aus



Für transversale Bosonen muß $\Delta J = 1$ für das Parton gelten, für longitudinale Bosonen dagegen $\Delta J = 0$. Spin $S = 0$ Partonen können also nicht an transversale Bosonen koppeln ($F_1 = 0$). Für $s = \frac{1}{2}$ Partonen gilt, daß der γ_μ bzw. $\gamma_\mu \gamma_5$ -Vertex helizitätserhaltend ist (bis auf Massenterme). Für das Spin $-\frac{1}{2}$ Parton gilt also $\Delta J = 1$ und eine Kopplung an das longitudinale Boson ist ausgeschlossen ($F_3 = 0$).

Berücksichtigt man endliche Transversalimpulse der Partonen, so ändert sich (II.2.34) ab in

$$R(x, Q^2) \rightarrow \frac{Q^2 + 4(m_i^2 + \langle p_i^2 \rangle)}{2 \langle p_i^2 \rangle} \rightarrow \frac{Q^2}{2 \langle p_i^2 \rangle} \quad S = 0 \quad (II.2.36)$$

$$R(x, Q^2) \rightarrow \frac{4(m_i^2 + \langle p_i^2 \rangle)}{Q^2 + \langle p_i^2 \rangle} \rightarrow 4 \frac{m_i^2 + \langle p_i^2 \rangle}{Q^2} \quad S = \frac{1}{2}$$

Da die Experimente auf einen dominanten Anteil von Spin $s = \frac{1}{2}$ hindeuten, soll im folgenden nur dieser Fall untersucht werden.

b) Ladungen der Partonen

Summe der Ladungsquadrate

$$\begin{aligned} \frac{F_1^{ep}(x) + F_1^{en}(x)}{F_1^{vp}(x) + F_1^{vn}(x)} &= \frac{F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)}{F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sum_i \left[\frac{1}{4} Y_{ei}^2 + (\bar{Y}_{ei}^i)^2 \right] [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]}{\sum_i \left[\bar{Y}_{ei}^i (\bar{Y}_{ei}^i + 1) - (\bar{Y}_{ei}^i)^2 + \bar{Y}_{ei}^i (\bar{Y}_{ei}^i + 1) - (\bar{Y}_{ei}^i)^2 \right] [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]} \\ &= \frac{1}{4} [1 + (Y_{ei}^i)^2] \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{18} \text{ Gell Mann Zweig Quarks} \\ \frac{1}{2} \text{ Sakata} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} \text{alle } Y_{ei}^i \text{ gleich} \\ \bar{Y}_{ei}^i = \frac{1}{2} \\ \bar{Y}_{ei}^i = 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (II.2.37)$$

Isosinglett-Anteile ergeben einen zusätzlichen Beitrag für die elektromagnetischen Strukturfunktionen und erhöhen damit diesen Wert. Für Isodoublets gilt $\frac{1}{2} \sum_i e_i^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} Y_{ei}^i + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} Y_{ei}^i - \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} [1 + (Y_{ei}^i)^2]$, daher die Bezeichnung "Summe der Ladungsquadrate".

Die Relation gilt auch in der integrierten Form, z.B. als

$$\frac{\int dx [F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)]}{\int dx [F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)]} = \frac{1}{2} \frac{\sum_i [\frac{1}{4} (Y_L^i)^2 + (\bar{I}_{3L}^i)^2] \int dx x [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]}{\sum_i [I_L^i(I_L^i + 1) - (\bar{I}_{3L}^i)^2 + I_R^i(I_R^i + 1) - (\bar{I}_{3R}^i)^2] \int dx x [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]} \quad (\text{II.2.38})$$

c) Hyperladung der Partonen

Die Relation (II.2.37), die ein Maß für die Summe der Ladungsquadrate war, läßt sich auch zur Bestimmung von Y_L^i verwenden. Es gibt aber noch andere Möglichkeiten

$$\begin{aligned} \frac{F_1^{ep}(x) - F_1^{en}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} &= \frac{1}{2x} \frac{F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} = \frac{\sum_i (Y_L^i \bar{I}_{3L}^i) [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]}{4 \sum_i (I_{3L}^i - I_{3R}^i) [N_i(x) + \bar{N}_i(x)]} \\ &= \frac{1}{4} Y_L^i \quad (\text{II.2.39}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} \text{ Gell-Mann Zweig} \\ \frac{1}{4} \text{ Sakata} \end{array} \right\} \quad \text{falls} \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ \text{alle } Y_L^i \text{ sind gleich} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Die Gleichung wird als Llewellyn-Smith Relation bezeichnet [II.2.7].

Liegt eine isoskalare Antipartonverteilung vor, gilt also $\bar{N}_{I, I_3}(x) = \bar{N}_{I, -I_3}(x)$, so folgt daraus $\sum_i I_3^i \bar{N}_i(x) = 0$. Mit dieser Annahme gilt

$$\begin{aligned} \frac{F_1^{ep}(x) - F_1^{en}(x)}{F_1^{vp}(x) - F_1^{vn}(x)} &= \frac{F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)}{F_2^{vp}(x) - F_2^{vn}(x)} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_i Y_L^i \bar{I}_{3L}^i N_i(x)}{\sum_i (I_{3L}^i + \bar{I}_{3R}^i) N_i(x)} \quad (\text{II.2.40}) \\ &= -\frac{1}{2} Y_L^i = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} \text{ Gell-Mann Zweig} \\ -\frac{1}{2} \text{ Sakata} \end{array} \right\} \quad \text{falls} \left\{ \begin{array}{l} \text{isoskalares } \bar{N}_L \\ I_R^i = 0 \\ \text{alle } Y_L^i \text{ sind gleich} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Adler Summenregel (II.2.47) bzw. der Bjorken-backward Summenregel (II.2.46); die keine zusätzlichen Forderungen bedeuten, läßt sich das auch schreiben als

$$\int dx [F_1^{ep}(x) - F_1^{en}(x)] = \int \frac{dx}{x} [F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)] \simeq \frac{1}{2} Y_L^i \quad (\text{II.2.41})$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{6} & \text{Gell-Mann Zweig} \\ \frac{1}{2} & \text{Sakata} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} \text{isoskalares } \bar{N}_1 \\ \bar{I}_R^i = 0 \\ \text{alle } Y_L^i \text{ sind gleich} \end{array} \right\}$$

d) Anzahl der Valenzpartonen

$$\int dx [F_3^{vp}(x) + F_3^{vn}(x)] = -4 \sum_i \left[(\bar{I}_L^i (\bar{I}_L^i + 1) - (\bar{I}_S^i)^2) - (\bar{I}_R^i (\bar{I}_R^i + 1) - (\bar{I}_{3R}^i)^2) \right] \quad (\text{II.2.42})$$

$$= \int dx [N_L(x) - \bar{N}_L(x)]$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} -6 & \text{Gell-Mann Zweig} \\ -2 & \text{Sakata} \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_L^i = \frac{1}{2} \\ \bar{I}_R^i = 0 \\ \text{Normierungsbedingungen (II.2.30)} \end{array} \right\}$$

Man bezeichnet (II.2.42) als Groß-Llewellyn-Smith Summenregel [II.2.8]. Sie mißt eigentlich den Überschuß an V-A Kopplung gegenüber der V+A Kopplung. Für $\bar{I}_R^i = 0$ entspricht dies der Anzahl der sogenannten Valenzpartonen, also dem Überschuß an Partonen gegenüber den Antipartonen. Für Isodoublets ist (II.2.40) somit die mit 2 multiplizierte Anzahl von Valenzpartonen im Proton.

e) Energie-Impuls-Anteil der (geladenen) Partonen

$$\int dx [F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)] = \sum_i \left[\frac{1}{4} (Y_L^i)^2 + (\bar{I}_{3L}^i)^2 \right] \int dx x [N_L(x) + \bar{N}_L(x)] \quad (\text{II.2.43})$$

$$= \frac{1}{4} [1 + (Y_L^i)^2] (1 - \epsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5}{18} (1 - \epsilon) & \text{Gell-Mann Zweig} \\ \frac{1}{2} (1 - \epsilon) & \text{Sakata} \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_L^i = \frac{1}{2} \\ Y_L^i \text{ alle gleich} \\ \text{Normierung (II.2.31)} \end{array} \right\}$$

Die Größe stellt also den mit der Summe der Ladungsquadrate gewichteten Impulsanteil geladener Partonen am Proton dar. Zum Vergleich kann man

$$\int dx [F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\nu n}(x)] = 4 \sum_i \left[I_L^i(I_L^i+1) - (I_{3L}^i)^2 + I_R^i(I_R^i+1) - (I_{3R}^i)^2 \right] \int dx x [N_i(x) + \bar{N}_i(x)] \quad (\text{II.2.44})$$

$$= 2(1-\epsilon) \quad \text{für} \left\{ \begin{array}{l} I_L^i = \frac{1}{2} \\ I_R^i = 0 \\ \text{Normierung (II.2.31)} \end{array} \right\}$$

heranziehen.

f) Verteilung der Partonen/Antipartonen im Proton

$$F_L^{\nu p}(x) + F_L^{\nu n}(x) = 8x \sum_i \left\{ [I_L^i(I_L^i+1) - (I_{3L}^i)^2] N_i(x) + [I_R^i(I_R^i+1) - (I_{3R}^i)^2] \bar{N}_i(x) \right\} \quad (\text{II.2.45a})$$

$$= 4x \sum_i N_i(x) \quad \text{falls} \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ I_L^i = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$F_R^{\nu p}(x) + F_R^{\nu n}(x) = 8x \sum_i \left\{ [I_R^i(I_R^i+1) - (I_{3R}^i)^2] N_i(x) + [I_L^i(I_L^i+1) - (I_{3L}^i)^2] \bar{N}_i(x) \right\} \quad (\text{II.2.45b})$$

$$= 4x \sum_i \bar{N}_i(x) \quad \text{falls} \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ I_L^i = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

In integrierter Form erhält man daraus den Impuls-Anteil, der von Partonen bzw. Antipartonen getragen wird.

g) Summenregeln, die unabhängig vom speziellen Modell (Darstellung) gelten

$$\int dx [F_1^{\nu p}(x) - F_1^{\nu n}(x)] = -2 \sum_i \int dx (I_{3L}^i + I_{3R}^i) [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] \quad (\text{II.2.46})$$

$$= -1 \quad \text{falls} \quad I_R^i = 0$$

Diese Summenregel wird als Bjorken backward Summenregel [II.2.9] bezeichnet. Man sollte beachten, daß sich die Normierungsbedingungen (II.2.29) auf den starken Isospin beziehen, hier jedoch der schwache Isospin verwandt wird. Für $I_R^1 = 0$ sichert jedoch die Gültigkeit der CVC Hypothese, daß diese beiden Arten von Isospin in (II.2.46) zum selben Ergebnis führen.

$$\int \frac{dx}{2x} [F_2^{vp}(x) - F_2^{vn}(x)] = -2 \sum_i \int dx (I_{3L}^i + I_{3R}^i) [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] \quad (\text{II.2.47})$$

$$= -1 \quad \text{falls } I_R^i = 0$$

Diese Summenregel heißt Adler Summenregel [II.2.10] und gilt unter allgemeineren Bedingungen, als diese Ableitung es vermuten läßt. So ist ihre Gültigkeit nicht an das Skalenverhalten von $F_2(x, Q^2)$ gebunden und gilt auch bei Skalenbrechung für endliche Werte von Q^2 (siehe Kapitel II.3).

$$\frac{F_1^{vp}(x) - F_1^{vn}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} = \frac{1}{2x} \frac{F_2^{vp}(x) - F_2^{vn}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_i (I_{3L}^i + I_{3R}^i) N_i(x)}{\sum_i (I_{3L}^i - I_{3R}^i) N_i(x)} \quad (\text{II.2.48})$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \text{falls } \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ \text{isoskalarcs } \bar{N}_i \end{array} \right\}$$

Bei Verwendung der Adler Summenregel (II.2.47) erhält man daraus

$$\int dx [F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)] = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ \text{isoskalarcs } \bar{N}_i \\ \text{Adler S.R.} \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.49})$$

II.3. Bjorken-Johnson-Low-Limes (BJL-Limes) [II.3.1.]

Auf die eher anschauliche Art und Weise, in der im vorigen Abschnitt mit Hilfe des Partonmodells Resultate abgeleitet wurden, soll nun eine mehr formale Methode folgen. Die Grundidee dieses Paragraphen besteht darin, den Kommutator, der bei der Definition von $T_{\mu\nu}^{ab}$ durch das zeitgeordnete Produkt der Ströme (II.1.7) auftrat,

$$T_{\mu\nu}^{ab}(\rho, q) = P_{\mu\nu}^{ab}(\rho, q) + i \int d^4y e^{iqy} \theta(y_0) \langle N | [J_\mu^a(y), J_\nu^b(0)] | N \rangle \quad (\text{II.3.1})$$

formal in eine Reihe von gleichzeitigen Kommutatoren zu entwickeln. Nun sind andererseits die Strukturfunktionen durch Dispersionsrelationen ((II.1.13) und (II.1.13a)) mit $T_{\mu\nu}^{ab}$ verknüpft. Ein geeigneter Grenzprozeß - der Bjorken-Johnson-Low-Limes - führt auf eine Beziehung zwischen den Momenten dieser Strukturfunktionen und den Matrixelementen der gleichzeitigen Kommutatoren. Für diese Kommutatoren werden dabei Ergebnisse aus Modellen wie der "Algebra der Felder" von Lee, Weinberg und Zumino [II.3.2], der "Stromalgebra", freien Theorien, oder der Störungsrechnung eingesetzt.

II.3.1. Ableitung der Relationen

In einem Lorentzsystem mit

$$q_\mu = (q_0, 0) \quad (\text{II.3.2a})$$

$$p_\mu = (E, \underline{p})$$

betrachtet man den unphysikalischen Grenzprozeß $q_0 \rightarrow i\infty$, $p_\mu = \text{konstant}$. Es gilt

$$q^2 = q_0^2, \quad \nu = E q_0, \quad x = -\frac{q_0}{2E} \quad (\text{II.3.2b})$$

Nichttriviale Resultate erhält man nur für die Raum-Raum-Komponenten von $T_{\mu\nu}$, da alle anderen in diesem System verschwinden. Aus (II.1.7), (II.1.8) und (II.1.13) folgt

$$P_{ij}^{ab}(x, q^2) + i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{q_0}\right)^{n+1} \int dx' y \langle N | \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^n J_i^a(y), J_j^b(0) \right]_{y_0=0} | N \rangle$$

$$= \delta_{ij} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2E}{q_0}\right)^{n+1} \int_0^1 dx' (x')^n \left[W_1^{ab}(x', q^2) - (-)^n W_1^{ba}(x', q^2) \right] \right.$$

$$\left. + (E q_0) C_1^{ab}(q^2) + T_1^{ab}(0, q^2) + \sum_{n=2}^{\infty} (E q_0)^n B_{1,n}^{ab}(q^2) \right\} \quad (\text{II.3.3})$$

$$+ \frac{P_i P_j}{H^2} \left\{ -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2E}{q_0}\right)^{n+1} \int_0^1 dx' (x')^n \left[W_2^{ab}(x', q^2) - (-)^n W_2^{ba}(x', q^2) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (E q_0)^n B_{2,n}^{ab}(q^2) \right\}$$

$$+ i \epsilon_{ijk} \frac{E P_k}{H^2} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2E}{q_0}\right)^n \int_0^1 dx' (x')^n \left[W_3^{ab}(x', q^2) - (-)^n W_3^{ba}(x', q^2) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (E q_0)^n B_{3,n}^{ab}(q^2) \right\}$$

Ein Vergleich von Potenzen von $\frac{1}{q_0}$ liefert den Zusammenhang zwischen den Momenten der Strukturfunktionen und den gleichzeitigen Kommutatoren der Ströme und ihrer Zeitableitungen. Wegen $q^2 = q_0^2$ ist es notwendig, die Strukturfunktionen zu nehmen, die nicht explizit von q^2 abhängen. Für endliche q^2 werden auch die dimensionslosen $F(x, q^2)$ Abweichungen vom Skalenverhalten aufweisen. Diese Skalenbrechung führt zur Modifizierung von Momenten mit höherem n . Man kann diese unerwünschten Beiträge durch einen weiteren Limes $E \rightarrow \infty$ loswerden, wie nachstehendes Beispiel zeigt

$$F(x, q^2) = A(x) + \frac{M^2}{q^2} B(x) + \dots \quad (\text{II.3.4})$$

$$\left(-\frac{2E}{q_0}\right)^{n+1} \int dx' (x')^n F(x', q^2) = \left(-\frac{2E}{q_0}\right)^{n+1} \int dx' (x')^n A(x')$$

$$+ \frac{M^2}{4E^2} \left(-\frac{2E}{q_0}\right)^{n+3} \int dx' (x')^n B(x') + \dots$$

Die Gleichung (II.3.3) enthält eine unendliche Anzahl von Summenregeln. Im Lorentzsystem mit $p_\mu = (p_0, 0, 0, p_3)$ lassen sie sich wegen $p_0 \approx p_3$ für $p_0 \rightarrow \infty$ z.B. in folgender Form angeben [II.3.3.]

$$\int dx(x)^n [F_1^{\alpha b}(x, q^2) - (-)^n F_1^{b\alpha}(x, q^2)] \underset{p_0 \rightarrow \infty}{=} \left(\frac{i}{2}\right) \left(-\frac{i}{2E}\right)^{n+1} \int dy \delta(y_0) \langle N | \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^n J_1^a(y), J_1^b(0) \right] | N \rangle$$

$$\int dx(x)^n \left[\left(\frac{1}{2x} F_2^{\alpha b}(x, q^2) - F_1^{\alpha b}(x, q^2) \right) - (-)^n \left(\frac{1}{2x} F_2^{b\alpha}(x, q^2) - F_1^{b\alpha}(x, q^2) \right) \right] \underset{p_0 \rightarrow \infty}{=} \left(\frac{i}{2}\right) \left(-\frac{i}{2E}\right)^{n+1} \int dy \delta(y_0) \langle N | \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^n J_3^a(y), J_3^b(0) \right] | N \rangle$$

$$\int dx(x)^n [F_3^{\alpha b}(x, q^2) + (-)^n F_3^{b\alpha}(x, q^2)] \underset{p_0 \rightarrow \infty}{=} \left(-\frac{i}{2E}\right)^{n+1} \int dy \delta(y_0) \langle N | \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^n J_1^a(y), J_2^b(0) \right] | N \rangle$$

(II.3.5)

Die Momente der Strukturfunktionen werden oft als Cornwall-Norton-Momente [II.3.4.] bezeichnet.

Bemerkungen

- a) Wegen der "Crossing"-Relationen (II.1.10) verschwinden für Elektroproduktion alle Momente mit ungeradem n identisch $M_{2n+1}(q^2) \equiv 0$. Für Neutrino-Produktion erhält man abwechselnd Aussagen über Summen und Differenzen von Neutrino- bzw. Antineutrino-Strukturfunktionen, da $F^{ab} + F^{ba}$ einen $F^\nu + F^{\bar{\nu}}$ entspricht.

- b) Die Verwendung der kanonischen Kommutatoren einer freien Theorie wird im allgemeinen zu falschen Ergebnissen führen. Störungstheoretische Berechnungen ergeben meist abgeänderte Resultate. Eine Ausnahme bilden die Vertauschungsrelationen mit den Zeitkomponenten erhaltener Ströme, da aus diesen Größen ja die erhaltenen Ladungen folgen. Das Auftreten nicht-kanonischer Werte wurde oft zu Unrecht als Versagen des Bjorken-Johnson-Low-Limes interpretiert [II.3.5.] .
- c) Die Vertauschungsrelationen von Raumkomponenten von Strömen werden im allgemeinen Schwinger Terme [II.3.6.] enthalten. Sind diese Größen reine c-Zahlen, so beeinflussen sie das Ergebnis nicht, da man sich sowieso nur für verbundene Graphen interessiert, die durch

$$\langle N | [J_\mu^a(y), J_\nu^b(0)] | N \rangle_c = \langle N | [J_\mu^a(y), J_\nu^b(0)] | N \rangle - \langle 0 | [J_\mu^a(y), J_\nu^b(0)] | 0 \rangle \quad (\text{II.3.6})$$

definiert sind. Operatorwertige Schwinger Terme dagegen verändern die Resultate.

- d) Die formale Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{q_0}$ liefert nur dann brauchbare Ergebnisse, wenn die entsprechenden Koeffizienten endlich sind. Höhere Ordnungen Störungstheorie liefern jedoch oft divergente Ausdrücke [II.3.7.] .

II.3.2. Modelle für die Kommutatoren

Der BJL Limes liefert nur Aussagen über die Kommutatoren von Raumkomponenten von Strömen. Im Gegensatz zu den Vertauschungsrelationen zwischen Ladungen (Zeitkomponenten von Strömen) hängen diese Größen von der speziellen Form der Ströme ab. Einige Beispiele werden im folgenden angegeben.

a) Spin s = 0 Konstituenten

Der Strom hat die Form $J_\mu^a(x) = i : \phi_\alpha^* (\frac{\partial}{\partial x}) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_\beta : (x)$ mit einer Matrix $(\frac{\partial}{\partial x})_{\alpha\beta}$, die im Raum der inneren Quantenzahlen wirkt. Die kanonischen Vertauschungsrelationen haben die Form

$$\delta(x_0) [J_i^a(x), J_j^b(0)] = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

$$\int dx \delta(x_0) [J_i^a(x), J_j^b(0)] = f^{abc} \partial_i : \phi^* \vec{\sigma} \vec{\sigma}_j \phi : (0) \quad (+) \\ + i \alpha^{abc} : \phi^* \vec{\sigma} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \phi : (0)$$

Ohne weitergehende Annahmen läßt sich nichts über die Matrixelemente des nichtverschwindenden Kommutators aussagen, doch läßt sich die Tensorstruktur angeben

$$C_{ij}^{ab}(\underline{p}) := \langle N | \int dy \delta(y_0) [J_i^a(y), J_j^b(0)] | N \rangle = A p_i p_j + B \delta_{ij} \quad (\text{II.3.8})$$

b) Algebra der Felder (FA) [II.3.2.]

In diesem Modell werden die Ströme durch Yang-Mills Felder gegeben $J_\mu^a \propto A_\mu^a$. Die Vertauschungsrelationen lauten

$$\delta(y_0) [J_i^a(y), J_j^b(0)] = 0 \quad (\text{II.3.9})$$

$$\delta(y_0) [J_i^a(y), J_j^b(0)] = i C^{ab} J_i^a(0) J_j^b(0) \delta^4(y)$$

+ c-Zahl

C_{ab} ist eine Matrix, die von der inneren Symmetrie abhängt.

Die Lorentz-Struktur der Matricelemente hat dieselbe Form

wie für den Fall von $s = 0$ Konstituenten.

$$C_{ij}^{'ab}(\underline{p}) := \langle N | C^{ab} J_i^a(0) J_j^b(0) | N \rangle = A' p_i p_j + B' \delta_{ij} \quad (\text{II.3.10})$$

c) Spin $s = \frac{1}{2}$ Konstituenten

Die Ströme haben die Form $J_\mu^a(x) = : \bar{\psi} \vec{\sigma} \vec{T}_\mu \psi : (x)$ mit

(+) Fußnote: Die Matrizen $\vec{\sigma}$ erfüllen die Vertauschungsrelationen $[\vec{\sigma}, \vec{\sigma}] = i f^{abc} \vec{\sigma}$ und $\{\vec{\sigma}, \vec{\sigma}\} = \alpha^{abc} \vec{\sigma}$

$\vec{T}_\mu = \delta_\mu$ bzw. $\vec{T}_\mu = \delta_\mu (1 - \delta_-)$ für den elektromagnetischen bzw. schwachen, geladenen Strom. Die kanonischen Vertauschungsrelationen lauten

$$\begin{aligned} \delta(y_0) [\vec{T}_i^a(y), \vec{T}_j^b(0)] = & \left[\frac{i}{2} f^{abc} : \vec{\psi} \vec{\sigma} (\vec{T}_i \delta_0 \vec{T}_j + \vec{T}_j \delta_0 \vec{T}_i) \psi : (0) \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} d^{abc} : \vec{\psi} \vec{\sigma} (\vec{T}_i \delta_0 \vec{T}_j - \vec{T}_j \delta_0 \vec{T}_i) \psi : (0) \right] \vec{\sigma}^a(y) \end{aligned} \quad (\text{II.3.11})$$

Um die Zeitableitung der Ströme zu bestimmen werde

$$\mathcal{L}_I = g_1 : \vec{\psi} \delta_\mu \psi : \beta^\mu + g_2 : \vec{\psi} \delta_\mu \psi : \phi + g_3 : \vec{\psi} \psi : \sigma \quad (\text{II.3.12})$$

als Wechselwirkung gewählt.

Man erhält [II.3.8]

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}}_\mu^a(y) = & : \vec{\psi} [-\delta_j \vec{\sigma}_j \delta_0 \vec{T}_i - \vec{T}_i \delta_0 \delta_j \vec{\sigma}_j + i(\delta_1 + g_3 \sigma(y))(\delta_0 \vec{T}_i - \vec{T}_i \delta_0) \\ & + i g_1 (\delta_j \beta_j(y) \delta_0 \vec{T}_i - \vec{T}_i \delta_0 \delta_j \beta_j(y)) + g_2 \phi(y) (\delta_i \delta_0 \vec{T}_i - \vec{T}_i \delta_0 \delta_i)] \vec{\sigma}^a(y) \end{aligned} \quad (\text{II.3.13})$$

Für den elektromagnetischen Strom z.B. führt das zu

$$\begin{aligned} C_{ij}(\underline{p}) = & i \langle N | \int d^4y \delta(y_0) [\vec{T}_i^{\text{elm}}(y), \vec{T}_j^{\text{elm}}(0)] | N \rangle = \\ = & -i \langle N | : \vec{\psi} [\delta_i \vec{\sigma}_j + \delta_j \vec{\sigma}_i - 2\delta_{ij} \vec{\sigma}_\kappa \vec{\sigma}_\kappa - 2i g_1 (\delta_i \beta_j + \delta_j \beta_i - 2\delta_{ij} \delta_\kappa \beta_\kappa) \\ & - 4i\pi \delta_{ij} + \delta_{ij} (g_2 \delta_\kappa \phi(\omega) + g_3 \sigma(0))] Q^2 \psi : (0) | N \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.3.14})$$

mit der Matrix der Ladungen $Q_{\alpha\beta}$. Für nicht zu singuläre Operatorprodukte kann man wieder die Tensorstruktur angeben

$$\begin{aligned} i \langle N | : \vec{\psi} (\delta_\mu \partial_\nu - i g_1 \delta_\mu \beta_\nu) \psi : (0) | N \rangle = & A''_{\mu\nu} p_\nu + B''_{\mu\nu} \\ i \langle N | : \vec{\psi} (-4i\pi + g_2 \phi + g_3 \sigma) \psi : (0) | N \rangle = & C'' \end{aligned} \quad (\text{II.3.15})$$

II.3.3. Ableitung von Summenregeln und Relationen zwischen den Strukturfunktionen

Für die schwache Wechselwirkung wird eine reine V - A Wechselwirkung angenommen. Außerdem soll die CVC Hypothese gelten, so daß sich für den schwachen, geladenen Strom folgender Ausdruck ergibt

$$J_{\mu}^{\pm}(y) = [V_{\mu}^1(y) \pm i V_{\mu}^2(y)] - [A_{\mu}^1(y) \pm i A_{\mu}^2(y)] \quad (\text{II.3.16})$$

Zu Vergleichszwecken sollen die Ergebnisse sowohl für das Sakata Modell, als auch für Gell-Mann-Zweig Quarks (GMZ) angegeben werden. Dazu ist es bequem, die SU(3) durch Hinzunahme von $\bar{G} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu einer U(3) zu erweitern.

A) Beziehungen, die aus $\mathcal{S}(y_0) [J_i^a(y), J_j^b(0)]$ folgen

Es lassen sich keine Beziehungen für die Elektroproduktion ableiten. Die Matricelemente müssen nämlich antisymmetrisch in den Lorentzindizes i und j sein, was mit p als einzigem Vektor, der zur Verfügung steht, nur den Wert 0 zuläßt.

Für FA und s=0 Konstituenten verschwindet $\mathcal{S}(y_0) [J_i^a(y), J_j^b(0)]$ auch im Falle der Neutrinoproduktion. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \int dx F_1^{\nu}(x, q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} &= \int dx F_1^{\bar{\nu}}(x, q^2) \\ \int \frac{dx}{x} F_2^{\nu}(x, q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} &= \int \frac{dx}{x} F_2^{\bar{\nu}}(x, q^2) \\ F_3^{\nu}(x, q^2) &= F_3^{\bar{\nu}}(x, q^2) \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3.17})$$

Das Verschwinden von F_3 ist dabei eine Folge eines fehlenden Axialvektorstroms für FA und s=0.

Für $s = \frac{1}{2}$ Konstituenten erhält man drei Summenregeln.
Aus $\mathcal{S}(y_0) [J_i^{\pm}(y), J_i^{\mp}(0)] = 4 \sum_{\ell} F^{\ell 12} [V_{\ell}^{\ell}(0) - A_{\ell}^{\ell}(0)] \mathcal{S}^{\ell}(y)$

folgt die "Bjorken-backward" Summenregel [II.3.9]

$$\int dx [F_1^{\bar{\nu}p}(x, q^2) - F_1^{\nu p}(x, q^2)] \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} = 2 I_3(p) = 1 \quad (\text{II.3.18})$$

da $\langle \rho | V_0^3(0) | \rho \rangle = 2 \rho_0 \bar{I}_3(\rho)$ gilt.

Der Kommutator

$$\delta(y_0) [J_1^+(y), J_2^-(0)] = 2i \sum_{\epsilon} (\alpha^{1\epsilon} + \alpha^{2\epsilon}) [V_3^{\epsilon}(0) - A_3^{\epsilon}(0)] \delta^4(y)$$

führt auf die darstellungsabhängige (abhängig von den d's)

Groß-Llewellyn-Smith Summenregel [II.3.10]

$$\int dx [F_3^{\nu\rho}(x, q^2) + F_3^{\bar{\nu}\rho}(x, q^2)] = \begin{cases} -2(2B+Y) = -6 & \text{G\ddot{u}nz} \\ -2Y = -2 & \text{Sakata} \end{cases} \quad (\text{II.3.19})$$

Für FA und s=0 Konstituenten hätte man für beide Summenregeln = 0 als rechte Seite erhalten (siehe (II.3.17)).

Eine Kombination der Bjorken-backward Summenregel (II.3.18) und der Callan-Groß Relation (II.3.24) ergibt schließlich die sogenannte Adler Summenregel [II.3.11]

$$\int \frac{dx}{2x} [F_2^{\nu\rho}(x, q^2) - F_2^{\bar{\nu}\rho}(x, q^2)] \Big|_{q^2 \rightarrow \infty} = 2 \bar{I}_3(\rho) = 1 \quad (\text{II.3.20})$$

Sie gilt jedoch unter allgemeineren Bedingungen als die beiden oben genannten Relationen. Sie läßt sich nämlich ohne Verwendung des Bjorken-Johnson-Low Limes aus der Isospinalgebra $\delta(y_0) [J_0^+(y), J_0^-(0)] = 2 J_0^3(0) \delta^4(y)$ ableiten. Es gilt

$$\begin{aligned} \int d^4q_0 W_{00}^{\bar{\nu}\nu}(\rho, q) &= \frac{1}{4\pi} \int d^4q_0 d^4y e^{iq_0 y} \langle N | [J_0^+(y), J_0^-(0)] | N \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^4y e^{iq_0 y} \delta^4(y) \langle N | [J_0^+(y), J_0^-(0)] | N \rangle \\ &= 4 \rho_0 \bar{I}_3(N) \end{aligned} \quad (\text{II.3.21})$$

wobei die Definition (II.1.5) für $\bar{W}_{\mu\nu}$ benutzt wurde. Nun wählt man ein System mit $p \cdot q = 0$. Dann gilt $\alpha q_0 = \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \alpha \nu$

und $q^2 = q_0^2 - \underline{q}^2 = \frac{\nu^2}{p^2 + m^2} - \underline{q}^2$. Falls man Limes und

Integration vertauschen darf, erhält man schließlich

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{P_0} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha q_0 W_{00}^{\bar{N}}(\rho, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha q_0 \left(\lim_{P_0} \frac{1}{P_0} W_{00}^{\bar{N}}(\rho, q) \right) \quad (\text{II.3.22})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{M^2} W_2^{\bar{N}}(\rho, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{M^2} [W_2^{\bar{N}}(\nu, q^2) - W_2^{\bar{N}}(\nu, q^2)] = 4T_3(N)$$

Das ist aber identisch mit (II.3.20).

Man kann noch einen Schritt weiter gehen. Durch eine Modifikation des Bjorken-Johnson-Low Limes, bei der $q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 + q_3) = 0$ und $q_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 - q_3) \rightarrow i\infty$ benutzt wird, läßt sich zeigen, daß (II.3.20) sogar für endliches, festgehaltenes q^2 gilt und somit unabhängig ist von einem Skalenverhalten von $F_2(x, q^2)$ [II.3.12].

B) Beziehungen, die aus $\delta(y_0) [J_i^a(q), J_j^b(0)]$ folgen

Verwendet man die Ausdrücke aus Abschnitt II.3.2 für die Kommutatoren und Matricelemente, so erhält man im Falle der Elektroproduktion

$$16\delta_{ij} \int dx x F_1^e(x, q^2) + 8 \frac{p_i p_j}{E^2} \int dx x F_2^e(x, q^2) \stackrel{q^2 \rightarrow -\infty}{=} \begin{cases} 2A \left(\frac{p_i p_j}{E^2} - \delta_{ij} \right) & s = \frac{1}{2} \\ A \cdot \frac{p_i p_j}{E^2} & FA \text{ und } s = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.23})$$

Daraus folgt zunächst

$$\int dx x F_3^e(x, q^2) = \int dx [F_2^e(x, q^2) - 2x F_1^e(x, q^2)] \stackrel{q^2 \rightarrow -\infty}{=} 0 \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\int dx x F_1^e(x, q^2) \stackrel{q^2 \rightarrow -\infty}{=} 0 \quad FA \text{ und } s = 0 \quad (\text{II.3.24a})$$

was sich wegen der Positivität der Strukturfunktionen F_1 , F_3 (sie sind proportional zum transversalen bzw. longitudinalen Wirkungsquerschnitt und damit nicht negativ) zu

$$F_1^e(x, q^2) \stackrel{q^2 \rightarrow -\infty}{=} 0 \quad FA \text{ und } s = 0$$

$$F_3^e(x, q^2) \stackrel{q^2 \rightarrow -\infty}{=} 0 \quad s = \frac{1}{2} \quad (\text{II.3.24b})$$

verschärfen läßt. Auf analoge Weise leitet man ab, daß

$$\begin{aligned} F_1^\nu(x, q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} &= 0 & F_1^{\bar{\nu}}(x, q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} &= 0 & FA \text{ und } s=0 \\ & & & & (II.3.24c) \\ F_5^\nu(x, q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} &= 0 & F_5^{\bar{\nu}}(x, q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} &= 0 & s=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

gilt. $F_s = 0$ für Spin $\frac{1}{2}$ wird als Callan-Groß-Relation [II.3.13] bezeichnet.

Die sogenannte Llewellyn-Smith-Relation [II.3.14] folgt aus dem Vergleich von

$$\int dx \, x \, F_1^{\nu p}(x, q^2) = \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{4E^2} \langle p_2 | \bar{\psi}(0) (i \gamma_3 \partial_2 + g_v \gamma_3 \beta_2) Q^2 \psi(0) | p_2 \rangle \quad (II.3.25)$$

$$\int dx \, x [F_3^{\nu p}(x, q^2) - F_3^{\nu n}(x, q^2)] = \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{2E^2} \langle p_2 | \bar{\psi}(0) (i \gamma_3 \partial_2 + g_v \gamma_3 \beta_2) I_3 \psi(0) | p_2 \rangle$$

Wie man leicht zeigen kann, läßt sich das Quadrat der Konstituenten-Ladungen durch deren Isospin, Baryonenzahl und Hyperladung ausdrücken

$$(Q^i)^2 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3}{2} B^i + \frac{1}{6} Y^i + \frac{1}{3} I_3^i & \text{GMZ} \\ \frac{1}{2} Y^i + I_3^i & \text{Sakata} \end{array} \right\} \quad (II.3.26)$$

so daß die gewünschte Relation folgt

$$\frac{\int dx \, x [F_1^{\nu p}(x, q^2) - F_1^{\nu n}(x, q^2)]}{\int dx \, x [F_3^{\nu p}(x, q^2) - F_3^{\nu n}(x, q^2)]} \Big|_{q^2 \rightarrow -\infty} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{12} & \text{GMZ} \\ \frac{1}{4} & \text{Sakata} \end{array} \right\} \quad (II.3.27a)$$

Man kann zeigen, daß diese Beziehung für alle ungeraden Momente, also $\int dx \, x^{2n+1} \dots$ gilt. Wechselt der Integrand nicht unendlich oft das Vorzeichen, so gilt diese Relation also auch in der lokalen Form [II.3.15]

$$\frac{F_1^{ep}(x, q^2) - F_1^{en}(x, q^2)}{F_3^{vp}(x, q^2) - F_3^{vn}(x, q^2) q^2 \rightarrow \infty} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{12} & \text{GMZ} \\ \frac{1}{4} & \text{Sakata} \end{array} \right\} \quad (\text{II.3.27b})$$

Für die Neutrinoproduktion erhält man

$$\int dx [F_2^{vp}(x, q^2) + F_2^{vn}(x, q^2)] \\ = \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{2E^2} \langle p_z | \bar{\psi}(0) (i \gamma_z \partial_z + g_v \gamma_z \beta_z) \left\{ \begin{array}{ll} (48+24) & \text{GMZ} \\ 24 & \text{Sakata} \end{array} \right\} \psi(0) | p_z \rangle \quad (\text{II.3.28})$$

Außerdem kann man Q_1^2 darstellen als

$$Q_1^2 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} (\beta_i - \gamma_i) + \frac{5}{18} (2\beta_i + \gamma_i) + \frac{1}{3} I_3^i & \text{GMZ} \\ \frac{1}{2} \gamma_i + I_3^i & \text{Sakata} \end{array} \right\} \quad (\text{II.3.29})$$

Der (B- γ)-Anteil zu F_2 muß nun positiv semidefinit sein [II.3.16] (das entspricht auf dem Parton Niveau der Positivität der Verteilungsfunktion für das Strange-Quark).

Zusammen mit (II.3.25) erhält man schließlich

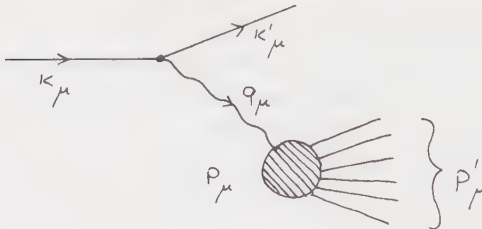
$$\frac{\int dx [F_2^{ep}(x, q^2) + F_2^{en}(x, q^2)]}{\int dx [F_2^{vp}(x, q^2) + F_2^{vn}(x, q^2)]} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5}{18} & \text{GMZ} \\ \frac{1}{2} & \text{Sakata} \end{array} \right\} \quad (\text{II.3.30})$$

II.4. Operatorproduktentwicklung und Lichtkegelalgebra

Der Bjorken-Johnson-Low Limes des vorhergegangenen Kapitels stellte historisch eine der ersten Methoden dar, Aussagen über das Hochenergieverhalten der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen zu erhalten. Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, nicht Lorentz-kovariant zu sein, wie man aus der Wahl des Bezugssystems $q_\mu = (q_0; 0)$ und dem unphysikalischen Limes-prozeß $q_0 \rightarrow i\infty$ ersieht. Eine Folge davon sind beispielsweise die Divergenzen, die sich in höherer Ordnung Störungstheorie ergeben. Hier soll nun eine Methode vorgeführt werden, die explizit kovariant ist.

II.4.1. Motivation der Lichtkegelentwicklung

Betrachten wir den Streuprozess im Ruhesystem des Hadrons



$$\begin{aligned}
 p_\mu &= (M, 0, 0, 0) & q_\mu &= \frac{1}{M}(\nu, 0, 0, \sqrt{\nu^2 + M^2 Q^2}) \\
 \nu &= p q & Q^2 &= -q^2
 \end{aligned}
 \tag{II.4.1}$$

Der Bjorken-Limes $Q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$, $x = \frac{Q^2}{2\nu}$ festgehalten, entspricht in diesem System

$$\begin{aligned}
 q_0 + q_3 &\simeq 2 \frac{\nu}{M} \rightarrow \infty \\
 q_0 - q_3 &\simeq -Mx = \text{konstant}
 \end{aligned}
 \tag{II.4.2}$$

Wie im Kapitel über das Partonmodell II.2 ausgeführt wurde,

erwartet man sich den Hauptbeitrag zu $W_{\mu\nu}^{ab}(\rho, q)$ von einem Integrationsgebiet y , für das $\exp[iqy]$ im Limes nicht zu stark als Funktion von y variiert. Wegen

$$qy = \frac{q_0 + q_3}{\sqrt{2}} \frac{y_0 - y_3}{\sqrt{2}} + \frac{q_0 - q_3}{\sqrt{2}} \frac{y_0 + y_3}{\sqrt{2}} = q_1 \cdot y_1 \quad (\text{II.4.3})$$

und (II.4.2) gilt das für

$$\begin{aligned} y_0 + y_3 &\simeq O\left(\frac{1}{M_\pi}\right) = \text{konstant} \\ y_0 - y_3 &\simeq O\left(\frac{M}{\nu}\right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4.4})$$

und somit für

$$0 \leq y^2 \leq y_0^2 - y_3^2 \leq O\left(\frac{1}{Q^2}\right) \rightarrow 0 \quad (\text{II.4.5})$$

Die Positivität von y^2 folgt dabei aus dem Verschwinden des Kommutators in $W_{\mu\nu}$ für $y^2 < 0$ (Mikrokausalität). Der Bjorken-Limes testet also das Verhalten der Matricelemente der Ströme am Lichtkegel. Dabei ist wegen $y_0 + y_3 \simeq \text{konst}$ ((II.4.4)) der gesamte Lichtkegel und nicht nur seine Spitze $y_\mu \rightarrow 0$ relevant (im Gegensatz zum Prozeß $e^+e^- \rightarrow h$, Kapitel III).

Zur Untersuchung des Bjorken-Limes wird man deshalb mit Wilson [II.4.1] eine Operatorproduktentwicklung am Lichtkegel, also für $y^2 \rightarrow 0$, ansetzen.

II.4.2. Modell ohne Spin

Das Vorgehen soll an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden. Sei ϕ ein masseloses Feld in einer freien Theorie und man nehme für $J(y)$ den Ausdruck $J(y) = :\phi^2:(y)$ [II.4.2]. Dann gilt

$$[J(y), J(0)] \underset{y^2 \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{i\pi} \delta(y^2) \epsilon(y_0) B_1(y, 0) \quad (\text{II.4.6})$$

mit dem bilokalen Operator

$$B_1(y, 0) = :\phi(y)\phi(0): + :\phi(0)\phi(y): \quad (\text{II.4.7})$$

Führt man das Matricelement dieses Operators

$$\langle N | B_1(y, 0) | N \rangle = : \hat{B}_1(y_P) + O(y^2) \quad (\text{II.4.8})$$

und seine Fourier-Transformierte

$$\hat{B}_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int d(y_P) e^{-i\alpha(y_P)} \hat{B}_1(y_P) \quad (\text{II.4.9})$$

ein, so läßt sich der dem hadronischen Tensor $W_{\mu\nu}$ (II.1.5) analoge Ausdruck schreiben als

$$\begin{aligned} W(\nu, Q^2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d y d\alpha \tilde{B}_1(\alpha) e^{i(\alpha P + q)y} \delta(y^2) \epsilon(y_0) + \dots \\ &= \int d\alpha \tilde{B}_1(\alpha) \delta(\alpha^2 \pi^2 + 2\alpha\nu - Q^2) \epsilon(\alpha\pi + \frac{\nu}{\pi}) + \dots \quad (\text{II.4.10}) \\ &= \frac{1}{2\nu} [\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(-2\frac{\nu}{M^2})] \end{aligned}$$

Der zweite Term der letzten Zeile ist eine Folge der etwas unvorsichtigen Ersetzung des Produktes der Ströme durch ihren Kommutator. Diese Ersetzung war erlaubt, da gemäß der Spektrumsbedingung für die hadronischen Endzustände gelten muß

$$(p+q)^2 \geq p^2 \quad \text{also} \quad |x| \leq 1 \quad (\text{II.4.11})$$

Dies bedeutet aber

$$\tilde{B}_1(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| > 1 \quad (\text{II.4.12})$$

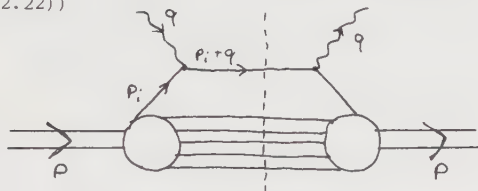
so daß (II.4.10) endgültig die Form

$$W(\nu, Q^2) = \frac{1}{\nu} \tilde{B}_1(x) + \dots \quad (\text{II.4.13})$$

annimmt.

Der hadronische Tensor setzt sich also zusammen aus der Fourier-Transformierten $\tilde{B}_1(\alpha)$ des Matricelementes des bilokalen Operators $B_1(y_P)$ und der Fourier-Transformierten der entsprechenden Lichtkegelsingularität in der Operatorproduktentwicklung.

Im Partonbild ist $W(v, Q^2)$ gegeben durch (siehe (II.2.18) und (II.2.22))



$$\begin{aligned}
 W(v, Q^2) &= \sum_m |a_m|^2 \sum_i W^{(i)}(p_i, q) \\
 &= \sum_{m,i} |a_m|^2 \delta(2p_i \cdot q + q^2) \Theta(p_{i0} + q_0) \\
 &= \sum_m \int \frac{d\xi_i}{\xi_i} |a_m|^2 \delta(2v\xi_i - 2vx) \\
 &= \frac{1}{2v} \frac{N(x)}{x}
 \end{aligned} \tag{II.4.14}$$

Ein Vergleich mit (II.4.10) zeigt, daß die Fourier-Transformierte der Lichtkegelsingularität hier dem "on-shell" Propagator

$\delta(2p_i \cdot q + q^2) \Theta(p_{i0} + q_0)$ der Partonen entspricht, während die

Fourier-Transformierte des Matrixelementes $B_1(x)$ mit der Verteilungsfunktion $\left(\frac{N(x)}{x}\right)$ zusammenhängt. Dieser letzte Punkt wird deutlicher, wenn man daran denkt, daß für einen Ein-Teilchenzustand mit Impuls ξp gilt (freie Theorie!)

$$\langle \xi p | : \phi(y) \phi(0) : | \xi p \rangle = e^{i\xi p y} \tag{II.4.15}$$

so daß im Falle einer inkohärenten Überlagerung solcher Zustände mit Verteilungsfunktion $N(\xi)$ gilt

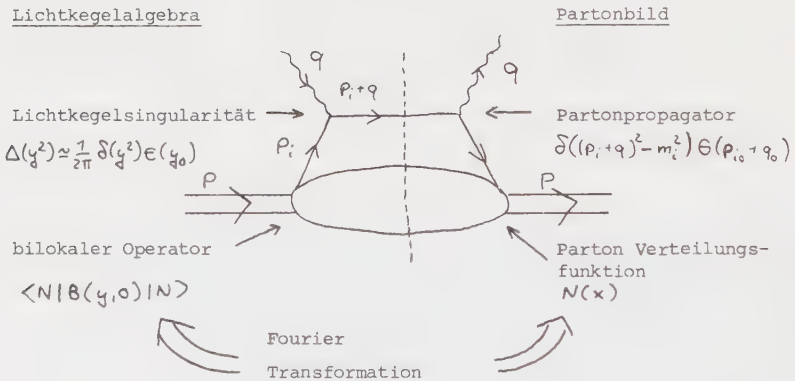
$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int d(y p) e^{-i\alpha(y p)} \langle N | : \phi(y) \phi(0) : | N \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d(y p) \frac{d\xi}{\xi} N(\xi) e^{i y p (\xi - \alpha)} \\
 &= \frac{N(\alpha)}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{II.4.16}$$

wie zuvor behauptet wurde¹⁾.

¹⁾ Im Falle von Vektorströmen hat man wegen der Zerlegung

$$\langle N | J_\mu(y, 0) | N \rangle = p_\mu J(y p) + \dots \text{den direkteren Zusammenhang} \\
 \tilde{J}(x) \Leftrightarrow N(x)$$

Der hier aufgezeigte Zusammenhang zwischen Parton Modell und Lichtkegelalgebra gilt auch im anschließend behandelten Fall von Vektorströmen. Für tiefinelastische Streuungen stellt das Parton Modell eine bestimmte Realisierung der Lichtkegelalgebra im Impulsraum dar [II.4.3]. Die Verknüpfung läßt sich in einprägsamer Form folgendermaßen darstellen [II.4.2]



II.4.2. Lichtkegelentwicklung und Strukturfunktion für Partonen [II.4.2]

Die Vektor- und Axialvektorströme haben hier die Form

$$\begin{aligned}
 V_\mu^a(y) &= :\bar{\psi} \gamma_\mu \hat{\sigma}^a \psi:(y) \\
 A_\mu^a(y) &= :\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \hat{\sigma}^a \psi:(y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4.17}$$

mit Matrizen $\hat{\sigma}^a$, die sich auf die inneren Quantenzahlen beziehen. Die kanonischen Vertauschungsrelationen freier Felder führen auf folgende Lichtkegelentwicklung

$$[V_\mu^a(y), V_\nu^b(z)] = [A_\mu^a(y), A_\nu^b(z)] \underset{y^2 \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma [\delta(y^2) \epsilon(y_0)]$$

$$[S_{\mu\sigma\nu\tau} (\alpha^{abc} \Delta_c^\sigma(y, 0) + i f^{abc} \Sigma_c^\sigma(y, 0)) \quad (\text{II.4.18})$$

$$+ \epsilon_{\mu\sigma\nu\tau} (-i \alpha^{abc} \Sigma_c^{A\sigma}(y, 0) + f^{abc} \Delta_c^{A\sigma}(y, 0))] + \dots$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwandt

$$[\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}] = i f^{abc} \frac{c}{\sigma}$$

$$\{\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\} = \alpha^{abc} \frac{c}{\sigma}$$

$$S_{\mu\sigma\nu\tau} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} + g_{\mu\tau} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\tau}$$

$$\Delta_c^\sigma(y, 0) = : \bar{\psi}(y) \gamma^\sigma \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) \gamma^\sigma \psi(y) :$$

$$\Delta_c^{A\sigma}(y, 0) = : \bar{\psi}(y) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi(y) :$$

$$\Sigma_c^\sigma(y, 0) = : \bar{\psi}(y) \gamma^\sigma \psi(0) : + : \bar{\psi}(0) \gamma^\sigma \psi(y) : \quad (\text{II.4.19})$$

$$\Sigma_c^{A\sigma}(y, 0) = : \bar{\psi}(y) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi(0) : + : \bar{\psi}(0) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi(y) :$$

Die entsprechenden Ausdrücke für $[V_\mu^a(y), A_\nu^b(z)] = [A_\mu^a(y), V_\nu^b(z)]$
 folgen aus (II.4.18) durch die Ersetzung
 $\Delta_c^\sigma \leftrightarrow \Delta_c^{A\sigma}$ und $\Sigma_c^\sigma \leftrightarrow \Sigma_c^{A\sigma}$.

Als nächstes werden die Matrixelemente der bilokalen Operatoren
 und ihre Fourier-Transformierten definiert.

$$\langle N | \left(\frac{\Sigma}{\Delta} \right)_c(y, 0) | N \rangle = \rho^\sigma \left(\frac{S}{D} \right)_c(y_p, y^2) + y^\sigma \left(\frac{\hat{S}}{\hat{D}} \right)_c(y_p, y^2) \quad (\text{II.4.20})$$

$$\left(\frac{\hat{S}}{\hat{D}} \right)_c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int d(y_p) e^{-i\alpha(y_p)} \left(\frac{S}{D} \right)_c(y_p, 0)$$

Bemerkungen

Da $\Sigma_c^{A\sigma}$ und $\Delta_c^{A\sigma}$ Pseudovektorcharakter haben, verschwinden
 ihre Matrixelemente zwischen unpolarisierten Nukleonenzuständen.
 Wegen des Faktors y^σ in (II.4.20) sind die Beiträge von $\hat{S}_c$ und
 $\hat{D}_c$ im Bjorken-Limes ($Q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$, x festgehalten) gegenüber
 denjenigen von S_c und D_c um einen Faktor $\frac{1}{Q^2}$ bzw. $\frac{1}{\nu}$ unterdrückt
 und werden deshalb weggelassen.

Strukturfunktionen

Koppelt das ausgetauschte Boson an $J_\mu^a(y) = \alpha V_\mu^a(y) + \beta A_\mu^a(y)$,
so erhält man aus den vorangegangenen Relationen und Näherungen
folgende Ausdrücke für die Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} F_1^{ab}(x) &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8} [\alpha^{abc} \tilde{D}_c(x) + i f^{abc} \tilde{S}_c(x)] \\ F_2^{ab}(x) &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} x [\alpha^{abc} \tilde{D}_c(x) + i f^{abc} \tilde{S}_c(x)] \\ F_3^{ab}(x) &= \frac{\alpha\beta}{2} [i f^{abc} \tilde{D}_c(x) + \alpha^{abc} \tilde{S}_c(x)] \end{aligned} \quad (\text{II.4.21})$$

Um das Sakata Modell (ganzzahlige Ladungen) mitbehandeln zu
können, muß man durch Hinzunehmen von $\bar{\sigma}$ von einer SU(3)
zu einer U(3) übergehen. Es werden folgende Ströme verwandt

$$\begin{aligned} J_\mu^e(y) &= \alpha V_\mu^0(y) + V_\mu^3(y) + b V_\mu^8(y) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{2}{3}} V_\mu^0(y) + V_\mu^3(y) + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8(y) & \text{Sakata} \\ V_\mu^3(y) + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8(y) & \text{GMZ} \end{array} \right\} \quad (\text{II.4.22}) \\ J_\mu^{v/\bar{v}}(y) &= [V_\mu^1(y) \pm i V_\mu^2(y)] - [A_\mu^1(y) \pm i A_\mu^2(y)] \end{aligned}$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} F_2^{ep}(x) &= F_1^{ep}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4\sqrt{3}} \hat{D}_0^p(x) + \frac{1}{4} \hat{D}_3^p(x) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \hat{D}_8^p(x) & \text{Sakata} \\ \frac{1}{6\sqrt{3}} \hat{D}_0^p(x) + \frac{1}{12} \hat{D}_3^p(x) + \frac{1}{12\sqrt{3}} \hat{D}_8^p(x) & \text{GMZ} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{2x} F_2^{vp/\bar{v}p}(x) &= F_1^{vp/\bar{v}p}(x) = \pm \frac{1}{2} \hat{S}_3^p(x) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \hat{D}_0^p(x) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \hat{D}_8^p(x) \quad (\text{II.4.23}) \\ F_3^{vp/\bar{v}p}(x) &= \pm \hat{D}_3^p(x) - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{S}_0^p(x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{S}_8^p(x) \end{aligned}$$

Die Isospin Symmetrie bedingt

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{0,8}^p(x) &= \tilde{S}_{0,8}^n(x) & \tilde{D}_{0,8}^p(x) &= \tilde{D}_{0,8}^n(x) \\ \tilde{S}_3^p(x) &= -\tilde{S}_3^n(x) & \tilde{D}_3^p(x) &= -\tilde{D}_3^n(x)\end{aligned}\quad (\text{II.4.24})$$

und führt somit zur Ladungssymmetrie $F_i^{vp} = F_i^{\bar{v}n}$ etc.

II.4.3. Ableitung von Resultaten

a) Spin der Konstituenten

Aus (II.4.21) liest man unmittelbar die Gültigkeit der Callan-Groß-Relation [II.4.4] $F_2(x)^{ab} - 2xF_1^{ab}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, die für (wechselwirkungsfreie) $s = \frac{1}{2}$ Konstituenten charakteristisch ist.

b) Relationen zwischen den Strukturfunktionen

$$F_i^{ep}(x) - F_i^{en}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{D}_3^p(x) & \text{Sakata} \\ \frac{1}{6} \tilde{D}_3^p(x) & \text{GMZ} \end{cases} \quad (\text{II.4.25})$$

$$F_3^{vp}(x) - F_3^{\bar{v}n}(x) = 2 \tilde{D}_3^p(x)$$

Daraus folgt die Llewellyn-Smith-Relation [4.4.5] (II.2.39),

$$\frac{F_i^{ep}(x) - F_i^{en}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{\bar{v}n}(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{Sakata} \\ \frac{1}{12} & \text{GMZ} \end{cases} \quad (\text{II.4.26})$$

die im Rahmen des Parton Modells für reine V-A Wechselwirkung (hier angenommen) und einheitliche Hyperladung Y_i einfach $\frac{1}{4} Y_i$ darstellt.

$$\frac{F_i^{ep}(x) + F_i^{en}(x)}{F_i^{vp}(x) + F_i^{\bar{v}n}(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Sakata} \\ \frac{2\sqrt{2} \tilde{D}_6^p(x) + \tilde{D}_8^p(x)}{6\sqrt{2} \tilde{D}_6^p(x) + 6 \tilde{D}_8^p(x)} & \text{GMZ} \end{cases} \quad (\text{II.4.27})$$

Ohne weitere Kenntnisse über $\tilde{D}_0$ und $\tilde{D}_8$ läßt sich für GMZ Partonen keine Aussage machen. Das Sakata Modell liefert eine eindeutige Aussage. Im Rahmen des Partonmodells entspricht das Ergebnis $\frac{1}{2} \sum_i e_i^2$ (II.2.37).

c) Summenregeln aus Matrixelementen von Strömen

Die Matrixelemente von Strömen sind bekannt. Sie sind proportional zu den jeweiligen Ladungen

$$\langle N | V_\mu^a(0) | N \rangle = 2 p_\mu Q^a(N) \quad (\text{II.4.28})$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle N | \Sigma_\mu^a(0,0) | N \rangle &= 2 \langle N | V_\mu^a(0) | N \rangle = 4 p_\mu Q^a(N) \\ &= p_\mu S^a(0,0) \end{aligned} \quad (\text{II.4.29})$$

Daraus folgt

$$4 Q^a(N) = S^a(0,0) = \int_{-1}^1 dx \tilde{S}^a(x) = 2 \int_0^1 dx \tilde{S}^a(x) \quad (\text{II.4.30})$$

Mit (II.4.21) ergeben sich schließlich Summenregeln der Form

$$\int_0^1 dx [F_1^{ab}(x) - F_1^{ba}(x)] = \frac{i}{2} (\alpha^2 + \beta^2) f^{abc} Q^c(N) \quad (\text{II.4.31a})$$

$$\int_0^1 dx [F_3^{ab}(x) + F_3^{ba}(x)] = 2 \alpha \beta f^{abc} Q^c(N) \quad (\text{II.4.31b})$$

Andere Summenregeln sind nicht möglich, da $\langle N | \Delta_\mu^a(0,0) | N \rangle \equiv 0$.

Die Adler Summenregel [II.4.6] und die Bjorken-backward-Regel [II.4.7] folgen aus (II.4.31a).

$$\int dx [F_1^{\nu p}(x) - F_1^{\nu n}(x)] = \int \frac{dx}{2x} [F_2^{\nu p}(x) - F_2^{\nu n}(x)] = -1 \quad (\text{II.4.32})$$

Die darstellungsabhängige Groß-Llewellyn-Smith Summenregel
[II.4.8] ergibt sich aus (II.4.31b)

$$\int_0^1 dx \left[F_3^{\nu\rho}(x) + F_3^{\nu\eta}(x) \right] = \begin{cases} -2Y = -2 & \text{Sakata} \\ -2(2B+Y) = -6 & \text{GMZ} \end{cases} \quad (\text{II.4.33})$$

Im Partonmodell zählte diese Regel die Anzahl der Valenzpartonen (x_2) (II.2.42).

d) Summenregel aus dem Matrixelement des Energie-Impuls-Tensors

Der von den Fermionen getragene Anteil des Energie-Impuls-Tensors ist

$$\begin{aligned} \langle N | \Theta_{\mu\nu}^F(0) | N \rangle &= \langle N | \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}^F | N \rangle \\ &= 2(1-\epsilon) p_\mu p_\nu + (g_{\mu\nu} \text{-Term}) \end{aligned} \quad (\text{II.4.34})$$

wobei ϵ den von den Gluonen getragenen Anteil am gesamten Energie-Impuls-Tensor darstellt.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \Delta_0^\mu(y, 0) &= -y^\nu : \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi : (0) + \dots \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} i y^\nu \Theta_{\mu\nu}^F(0) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.4.35})$$

und

$$\begin{aligned} \langle N | \Delta_0^\mu(y, 0) | N \rangle &= 2i \sqrt{\frac{2}{3}} (1-\epsilon) p^\mu(p_y) + \dots \\ &= p^\mu(p_y) \left[\frac{\partial}{\partial p_y} D_0(p_y, y^2) \right]_{y=0} + \dots \\ &= i p^\mu(p_y) \int_{-1}^1 dx \times \tilde{D}_0(x) \\ &= 2i p^\mu(p_y) \int_0^1 dx \times \tilde{D}_0(x) \end{aligned} \quad (\text{II.4.36})$$

$\tilde{D}_0(x)$ läßt sich aber durch geeignete Kombination von Struktur-
funktionen ausdrücken, so daß man erhält

$$1 - \epsilon = \int dx \left[\frac{3}{2} (F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)) - \frac{3}{4} (F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)) \right] \quad \text{GMZ (II.4.37)}$$

Im Falle des Sakata Modells ist es jedoch nicht möglich, $\tilde{D}_0(x)$
zu eliminieren ($F_2^{eN} = \frac{1}{2} F_2^{vN}$), so daß eine entsprechende
Formel nicht abgeleitet werden kann.

II.5. Momente von Strukturfunktionen und Lichtkegelentwicklung [II.5.1]

Im Abschnitt über die Lichtkegelalgebra II.4. hat sich gezeigt, daß Größen wie $\int \alpha \times F_1(x)$, bzw. $\int \frac{\alpha x}{2x} F_2(x)$ durch Matricelemente von Strömen bestimmt wurden, $\int \alpha \times F_1(x)$, bzw. $\int \alpha \times F_2(x)$ dagegen durch Matrixelemente des Energie-Impuls-Tensors. Hier soll nun gezeigt werden, daß ein enger Zusammenhang zwischen den Momenten von Strukturfunktionen und den Operatoren besteht, die im Bjorken-Limes, bzw. der Lichtkegelentwicklung in führender Ordnung zu diesen Momenten beitragen.

II.5.1. Modellentwicklung für skalare Ströme

Um die Ableitung nicht durch die Spinstruktur zu verkomplizieren, die durch den Vektorcharakter der Ströme ins Spiel kommt, soll hier als Beispiel ein skalarer Operator $J(x)$ als Strom verwandt werden. Im Sinne der Operatorproduktentwicklung von Wilson [II.5.2] wird eine Lichtkegelentwicklung für das zeitgeordnete Produkt der Ströme angesetzt

$$i T(J(y) J(0)) \underset{y^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_i C^i(y^2) B^i(y, 0) \quad (\text{II.5.1})$$

mit bilokalen Operatoren, von denen man annimmt, daß sie für $y_\mu \rightarrow 0$ regulär sind. Die Singularitätsstruktur am Lichtkegel steckt in den Koeffizientenfunktionen $C^i(y^2)$. Die $B^i(y, 0)$ entwickelt man in eine Potenzreihe nach y^{μ_i} und wählt dabei als Basis die lokalen, symmetrischen, spurlosen Operatoren $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i, n}(0)$, die zum Spin n gehören

$$i T(J(y) J(0)) \underset{y^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_{i, n} [y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} C_n^i(y^2)] O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i, n}(0) \quad (\text{II.5.2})$$

Aus Dimensionsgründen erhält man für das Verhalten von $C_n^i(y^2)$ am Lichtkegel

$$C_n^i(y^2) \underset{y^2 \rightarrow 0}{\sim} y^{\mu_i \neq 0} O\left(\left(\frac{1}{y^2 - i\varepsilon}\right)^{d_3 - \frac{1}{2} \tau_n^i}\right) \quad (\text{II.5.3})$$

$$\tau_n^i = \alpha_{0, i, n} - n$$

Dabei sind α_J und $\alpha_{0^{i,n}}$ die Dimension des Stromoperators J bzw. des Operators $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i,n}$. τ_n^i wird als Twist von $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i,n}$ bezeichnet.

Definiert man die Fourier-Transformierte von $C_n^i(q^2)$ durch die dimensionslose Größe

$$\int dy e^{iqy} y^{\mu_1} \dots y^{\mu_n} C_n^i(y^2) \underset{q^2 \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{(-2)^n q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n}}{(q^2)^{n+2+\frac{1}{2}\tau_n^i - \alpha_J}} \tilde{C}_n^i(q^2) \quad (\text{II.5.4})$$

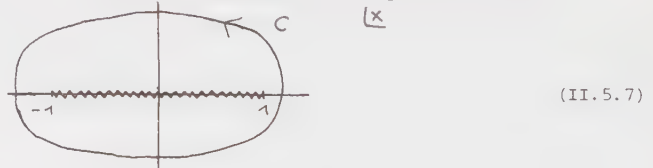
und das Matrizelement von $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i,n}$ mit Hilfe des ebenfalls dimensionslosen O_n^i

$$\langle N | O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i,n} | N \rangle = O_n^i(p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} + \text{Terme mit } g_{\mu_i \mu_j}) \quad (\text{II.5.5})$$

so erhält man

$$\begin{aligned} T(x, q^2) &= i \int dy e^{iqy} \langle N | T(J(y) J(0)) | N \rangle \\ &\underset{q^2 \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{1}{q^2} \right)^{2-\alpha_J} \sum_{i,n} \tilde{C}_n^i(q^2) O_n^i \frac{(-2p q)^n}{(q^2)^{n+2+\frac{1}{2}\tau_n^i}} + \dots \\ &= \sum_{i,n} \left(\frac{1}{q^2} \right)^{2+\frac{1}{2}\tau_n^i - \alpha_J} \left(\frac{1}{x} \right)^n \tilde{C}_n^i(q^2) O_n^i + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.5.6})$$

Wegen der physikalischen Spektrumsbedingung $(p+q)^2 \geq p^2$, also $0 \leq |x| \leq 1$, hat $T(x, q^2)$ einen Schnitt in der komplexen x -Ebene



und man erhält den Koeffizienten von x^{-n} durch

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dx x^{n-1} T(x, q^2) \underset{q^2 \rightarrow -\infty}{\sim} \sum_{i,n} \left(\frac{1}{q^2} \right)^{2+\frac{1}{2}\tau_n^i - \alpha_J} \tilde{C}_n^i(q^2) O_n^i \quad (\text{II.5.8})$$

Da nach (II.1.12) $\frac{1}{2\pi} \text{Im } T(x, q^2) = W(x, q^2)$ und außerdem die Crossing Relation $W(x, q^2) = -W(-x, q^2)$ (II.1.10) besteht, läßt sich das Ergebnis schließlich schreiben als

$$M_{2n}(q^2) = \int_0^1 dx x^{2n-1} W(x, q^2) \underset{q^2 \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{4} \sum_i \left(\frac{1}{q^2}\right)^{2+\frac{1}{2}r_n^i - \alpha_J} \tilde{C}_{2n}^i(q^2) O_{2n}^i$$

$$= \frac{1}{4} \tilde{C}_{2n}^0 O_{2n}^0 \quad (\text{für } \alpha_J = 3 \text{ und } r_n^0 = 2)$$
(II.5.9)

Diese Momente werden als Cornwall-Norton-Momente bezeichnet [II.5.3].

Bemerkungen

In freien Theorien sind die dimensionslosen $\tilde{C}_n^i(q^2)$ Konstanten. In renormierbaren, wechselwirkenden Feldtheorien werden sie jedoch im allgemeinen vom Impulsübertrag q^2 , Kopplungskonstanten g_α , Massen m_β und einem Normierungspunkt μ abhängen.

Wegen der Crossing Relation verschwinden hier alle Momente mit ungeradem n (beachte: $M_n(q^2) \propto \int_0^1 dx \dots$). Im realistischen Fall der Elektro- und Neutrinoproduktion erhält man nichtverschwindende Beiträge aus

<u>Elektroproduktion</u>	F_2^e	$M_{2n} \neq 0$ $M_{2n+1} = 0$	
<u>Neutrinoproduktion</u>	$F_2^{\nu+\bar{\nu}}, F_3^{\nu+\bar{\nu}}$	$M_{2n} \neq 0$ $M_{2n+1} = 0$	(II.5.10)
	$F_2^{\nu-\bar{\nu}}, F_3^{\nu-\bar{\nu}}$	$M_{2n} = 0$ $M_{2n+1} \neq 0$	

Da O_n den Spin n trägt, erhalten die Momente $M_n(q^2)$ Beiträge von Matrixelementen von Operatoren mit Spin n . So trägt der Stromoperator zu M_1 bei, der Energie-Impuls-Tensor zu $n=2$ etc. (siehe Kapitel II.4. über Lichtkegelalgebra).

Das führende Verhalten am Lichtkegel wird gemäß (II.5.9) durch die Operatoren mit niedrigstem Twist τ gegeben. Beiträge von Operatoren mit höherem Twist sind durch entsprechende Potenzen von $(\frac{1}{2})$ unterdrückt. In freien Theorien ist der niedrigst mögliche Twist $\tau=2$ und die dazugehörigen Operatoren haben die Form

$$:\phi^* \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi:$$

$$:\bar{\psi} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi:$$

(II.5.11)

$$:F_{\mu\alpha} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} F_{\mu\alpha}^*:$$

mit der kovarianten Ableitung $\partial_{\mu} = \partial_{\mu} - ig \vec{\sigma} \cdot \vec{A}_{\mu}^a$, die im Falle von Eichsymmetrien nötig ist. Zu den Operatoren mit $\tau = 2$ gehören sowohl der Stromoperator als auch der Energie-Impuls-Tensor.

In wechselwirkenden Theorien erhalten Operatoren gewöhnlich anomale Dimensionen. Dadurch könnten im Prinzip andere als die oben aufgeführten Operatoren die führenden Beiträge am Lichtkegel, bzw. im Bjorken-Limes liefern. In diesem Fall würde eine Partoninterpretation schwer werden, da die Korrespondenz von Partonmodell und Lichtkegelentwicklung eng damit zusammenhing, daß die im Limes führenden Operatoren bilinear in den Feldern sind. Im Rahmen einer Störungstheorie kann ein solcher Fall jedoch nicht auftreten, da die Größe der dazu benötigten Kopplungskonstanten die Gültigkeit der Störungsentwicklung hinfällig machen würde (die anomale Dimension stellt ja eine Potenzreihe in g dar und verschwindet für $g = 0$).

Korrekturen für endliche Werte von q^2

Die Formel (II.5.9) für die $M_n(q^2)$ galt für $q^2 \rightarrow -\infty$. Für endliche Werte von q^2 tragen auch Operatoren mit Twist $\tau > 2$ bei

$$M_n(q^2) \propto \left(\frac{1}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}(\tau_n - 2)} \tilde{C}_n^i(q^2) O_n^i \quad (\text{II.5.12})$$

Ihre Matrixelemente sind unbekannt und so läßt sich über die Größe dieser Korrekturen aus theoretischer Sicht nicht viel sagen.

Eine weitere Korrektur rührt von der Vernachlässigung der Spurterme bei der Definition der Matrixelemente (II.5.5) her. m dieser Terme führen zu einem Beitrag proportional zu

$$M_n(q^2) \propto \left(\frac{M^2}{Q^2}\right)^m \tilde{C}_{n+m}^i(q^2) O_{n+m}^i \quad (\text{II.5.13})$$

Für endliche Q^2 erhält man also Beiträge von Operatoren mit Spin $s > n$ zu $M_n(Q^2)$.

Diese unerwünschte Eigenschaft kann dadurch beseitigt werden, daß man mit Nachtmann in (II.5.2) eine Entwicklung nach der vierdimensionalen Verallgemeinerung der Kugelflächenfunktionen vornimmt [II.5.4]. An Stelle der gewohnten Legendre Polynome treten dabei Gegenbauer Polynome auf. Die so entstehenden sogenannten Nachtmann-Momente haben die Form

$$\begin{aligned} \mu_{2n}(Q^2) &= 2 \int_0^1 dv \frac{W(v, Q^2)}{Q^2} \left[\frac{Q^2}{v + \sqrt{v^2 + 4n^2 Q^2}} \right]^{2n+1} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} W(x, Q^2) \left[\frac{2x}{1 + \sqrt{1 + \frac{4n^2 Q^2}{x^2}}} \right]^{2n+1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_i C_{2n}^i(Q^2) O_{2n}^i \end{aligned} \quad (\text{II.5.14})$$

und gehen für $Q^2 \rightarrow \infty$ in die entsprechenden Cornwall-Norton-Momente (II.5.9) über. Sie erhalten aber im Gegensatz zu diesen schon für endliche Q^2 nur Beiträge von Operatoren mit vorgegebenem Spin. Die Umkehrung lautet

$$T(v, Q^2) = \sum_n C_{2n}^1 \left(\frac{iv}{\sqrt{4n^2 Q^2}} \right) \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)^n \mu_{2n}(Q^2) \quad (\text{II.5.15})$$

Vergleiche dazu (II.5.6).

II.5.2 Momente und Lichtkegelentwicklung für Vektorströme

Bei der Verallgemeinerung auf Vektorströme mit inneren Symmetrien treten wieder mehrere Strukturfunktionen auf. Im Falle von Spin $s = \frac{1}{2}$ Feldern, die minimal an Eichfelder gekoppelt sind, hat man [II.5.5]

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{ab}(x, Q^2) &= i \int d^4y e^{iqy} \langle N | T(J_\mu^a(y) J_\nu^b(0)) | N \rangle \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{x}\right)^n \left[(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2}) \tilde{C}_{1,n}^{i,ab}(Q^2) + \frac{1}{v} \left(p_\mu - \frac{v}{Q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{v}{Q^2} q_\nu \right) \tilde{C}_{2,n}^{i,ab}(Q^2) \right. \\ &\quad \left. - i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{p_\alpha q_\beta}{2v} \tilde{C}_{3,n}^{i,ab}(Q^2) \right] O_n^{i,ab} \end{aligned} \quad (\text{II.5.16})$$

Dabei wurde wieder

$$\langle N | O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i(ab)}(0) | N \rangle = O_n^{i(ab)}(\rho_{\mu_1} \dots \rho_{\mu_n} + \text{Spurterme}) \quad (\text{II.5.17})$$

gesetzt und die auftretenden Operatoren haben die Form

$$\begin{aligned} O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{n,i(a)}(0) &= \frac{(i)^{n-1}}{n!} [\bar{\psi} \tilde{\sigma}_{\mu_1}^a D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n} \psi(0) + \text{Permutationen}] \\ O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{n,i}(0) &= \frac{(i)^{n-1}}{n!} [\bar{\psi} \gamma_{\mu_1} D_{\mu_2} \dots D_{\mu_n} \psi(0) + \text{Permutationen}] \\ O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{n,i(G)}(0) &= \frac{(i)^{n-2}}{2(n!)} [\bar{F}_{\mu_1}^\alpha D_{\mu_2} \dots D_{\mu_{n-1}} F_{\alpha\mu_n} + \text{Permutationen}] \end{aligned} \quad (\text{II.5.18})$$

Operatoren mit negativer Parität wurden weggelassen, da sie verschwindende Matrixelemente für die unpolarisierten Nukleon-Zustände liefern.

Die zugehörigen Cornwall-Norton-Momente lauten

$$\begin{aligned} M_{1,n}^{ab}(Q^2) &= \int_0^1 dx x^{n-1} F_1^{ab}(x, Q^2) = \sum_i O_n^{i,ab} \tilde{C}_{1,n}^{i,ab}(Q^2) \\ M_{2,n}^{ab}(Q^2) &= \int_0^1 dx x^{n-2} F_2^{ab}(x, Q^2) = \sum_i O_n^{i,ab} \tilde{C}_{2,n}^{i,ab}(Q^2) \\ M_{3,n}^{ab}(Q^2) &= \int_0^1 dx x^{n-2} F_3^{ab}(x, Q^2) = \sum_i O_n^{i,ab} \tilde{C}_{3,n}^{i,ab}(Q^2) \end{aligned} \quad (\text{II.5.19})$$

und für die Nachtmann-Momente erhält man

$$\begin{aligned} \mu_{2,n}^{ab}(Q^2) &= \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \int_0^{n+1} F_2^{ab}(x, Q^2) \left(1 + \frac{4x^2 n^2}{Q^2}\right) (1 + 3\eta_n) \\ \mu_{3,n}^{ab}(Q^2) &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^{n+1} F_3^{ab}(x, Q^2) \left[1 + \left(\frac{n+1}{n+2}\right) 2\left(\frac{x}{\xi} - 1\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{II.5.20})$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2 n^2}{Q^2}}} \\ \eta_n &= \frac{2x n^2}{Q^2 + 4x^2 n^2} \frac{(n+1)\xi - 2(n+2)x}{(n+2)(n+3)} \end{aligned} \quad (\text{II.5.21})$$

Bemerkungen

Die Beschränkungen aus den Crossing Relationen wurden bereits in II.5.1 unter (II.5.10) aufgeführt.

Der Unterschied zwischen den beiden Arten von Momenten ist durchaus wesentlich und fällt mit steigendem n bei festgehaltenem Q^2 immer mehr ins Gewicht. Nachtmann hat an einem Modellfall gezeigt, daß er für $n=8$ und $Q^2=10 \text{ GeV}^2$ etwa 30 % betragen kann und für $Q^2=30 \text{ GeV}^2$ immer noch 10 % ausmacht [II.5.6]. Diese Verhältnisse sind durchaus realistisch. Aus diesem Grund ist es wesentlich, beim Vergleich von Theorie und Experiment die Nachtmann Momente heranzuziehen (siehe auch II.5.7).

II.6. Die Momente der Strukturfunktionen und die Renormierungsgruppe

II.6.1. Motivation

Bei allen vorangegangenen Untersuchungsmethoden wurden Ergebnisse aus freien Theorien verwandt (z.B. kanonische Vertauschungsrelationen). Eine Berücksichtigung der Wechselwirkung wird im allgemeinen zu abgeänderten Resultaten führen. Man kann im Rahmen einer Störungstheorie versuchen, diese Änderungen für kleine Kopplungen zu berechnen. Dabei treten in höheren Ordnungen Störungstheorie typische Ausdrücke der Form $[g^2 \ln(-q^2/\mu^2)]^n$ auf, falls die Größen bei $q^2 = -\mu^2$ normiert wurden. Um die Gültigkeit der Störungstheorie nicht zu verlieren, müssen solche Terme sehr klein bleiben und man kann deshalb nicht den Grenzfall $q^2 \rightarrow -\infty$ des Bjorken-Limes untersuchen. Mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung (siehe Anhang A2) ist es aber möglich, solche führenden Logarithmen aufzusummieren und durch effektive Massen und Kopplungskonstanten auszu-drücken, worauf z.B. Coleman hingewiesen hat [II.5.1]. Mit der so verbesserten Störungstheorie kann man nun den Limes untersuchen (falls ein ultravioletter Fixpunkt existiert, siehe Anhang A2).

II.6.2. Anwendung der Renormierungsgruppengleichung

In der vorliegenden Form läßt sich die Renormierungsgruppe leider nicht auf Streuexperimente anwenden. Wie in Anhang A2 beschrieben, müssen alle Impulse mit dem gleichen Faktor multipliziert werden, so daß sich wegen $p^2 = \eta^2 \rightarrow e^{2t} p^2 = e^{2t} \eta^2$ auch die Targetmasse ändern müßte. Man benötigt also eine Methode, um die Eigenschaften des Targets abseparieren zu können. Dies leistet aber gerade die Operatorproduktentwicklung des vorigen Abschnitts II.5 mit ihrer Aufspaltung in Koeffizientenfunktionen und Operatoren. Etwas schematisch geschrieben gilt

$$(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} + 2 \gamma_F) \int d^4y e^{iqy} \langle 0 | T(\bar{\psi}(-p) J(y) J(0) \psi(p)) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.6.1})$$

Dabei wurde $\gamma_J = 0$ für die erhaltenen Ströme berücksichtigt. Einsetzen der Operatorproduktentwicklung führt zu

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} + 2\gamma_F \right) \sum_{i,n} \tilde{C}_n^i(q^2) \langle 0 | \bar{\psi}(-p) O_n^i(0) \psi(p) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.6.2})$$

Andererseits gilt aber auch

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} + 2\gamma_F + \gamma_{O_n^i} \right) \langle 0 | \bar{\psi}(-p) O_n^i(0) \psi(p) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.6.3})$$

so daß man schließlich die vom Target unabhängige Beziehung erhält

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} - \gamma_{O_n^i} \right] \tilde{C}_n^i(q^2, g, m, \mu) = 0 \quad (\text{II.6.4})$$

Die Lösung der Renormierungsgruppengleichung (siehe Anhang A2) und der Zusammenhang zwischen $\tilde{C}_n^i$ und den Momenten der Strukturfunktionen (II.5.9) ergibt die Impulsabhängigkeit dieser Momente

$$M_{2n}(Q^2) = \int_0^1 dx \, x^{2n-1} \omega(x, Q^2) \rightarrow \frac{1}{4} O_{2n}^0 \tilde{C}_{2n}^0(1, \bar{g}(t), \bar{m}(t) e^{-t}, \mu) \exp \left[- \int_0^t \gamma_{O_{2n}^0}(\tau) d\tau \right] \quad (\text{II.6.5})$$

Hier wurde $Q^2 = e^{2t} \cdot 1$ gesetzt und der Einfachheit halber angenommen, daß nur ein Operator in führender Ordnung beiträgt.

Existieren mehrere Operatoren mit gleichem Spin, Twist und Quantenzahlen, wie z.B. $\bar{\psi} \gamma_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} \psi$ und $F_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_n} \bar{\psi} \gamma_{\mu_n}$, so werden sie bei der Renormierung mischen. Man hat dann

$$\tilde{C}_{k,n}^i(q^2, g, \mu) = \sum_j \left[T \exp \left(- \int_0^t \underline{\gamma}^{(n)}(\tau) d\tau \right) \right]_{ij} \tilde{C}_{k,n}^j(1, \bar{g}(t), \mu) \quad (\text{II.6.6})$$

mit einer Matrix $\underline{\gamma}^{(n)}$ der anomalen Dimensionen. In asymptotisch freien Theorien verschwindet $\bar{g}^2(t) \propto \frac{1}{\ln t}$ für $t \rightarrow \infty$ und dasselbe gilt auch für $\underline{\gamma}^{(n)}(\bar{g}(t))$. Man zerlegt deshalb $\underline{\gamma}^{(n)}$ in

$$\underline{\gamma}^{(n)}(g) = \underline{\gamma}^{(n)} \cdot g^2 + \underline{r}^{(n)}(g) \quad (\text{II.6.7})$$

mit $\underline{r}^{(n)}(g) = O(g^4)$ [II.6.2]. Außerdem drückt man $\underline{\gamma}^{(n)}$ durch

seine Eigenwerte $\gamma_e^{(n)}$ aus

$$\gamma_e^{(n)} = \sum_e \gamma_e^{(n)} P^e, \quad P^i P^j = \delta^{ij} 1, \quad \sum_e P^e = 1 \quad (\text{II.6.8})$$

Das führt schließlich auf

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{k,n}^i(q, g, \mu) &= \sum_{q^2 \rightarrow -\infty} \left[e_n(-q^2/\mu^2) \right]^{-\gamma_e^{(n)}/2b_0} \sum_j (P^e M^{(n)})_{ij} \tilde{C}_{k,n}^j(1, \bar{g}(t), \mu) \\ M^{(n)} &= T \exp \left[- \int dt \exp \left(\frac{e_n t}{b_0} \gamma_e^{(n)} \right) M^{(n)}(\bar{g}(t)) \exp \left(- \frac{e_n t}{b_0} \gamma_e^{(n)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.6.9})$$

Bemerkungen

Der im Limes führende Term wird durch den kleinsten Eigenwert von $\gamma_e^{(n)}$ bestimmt. Der zu diesem Operator gehörende Koeffizient ist dagegen unbekannt, so lange $M^{(n)}$ unbekannt ist.

Im Falle erhaltener Ströme und des Energie-Impuls-Tensors liefert die entsprechende Projektion auf $M^{(n)}$ den Wert 1, da für erhaltene Operatoren die anomalen Dimensionen verschwinden. Hier kennt man also die Koeffizienten und kann deshalb die Impulsabhängigkeit angeben.

Tensor- oder SU(N)-Flavor-Strukturen werden im Limes $q^2 \rightarrow -\infty$ gültig bleiben, falls sie in der Operatorproduktentwicklung für $g = 0$ gelten. Diese Strukturen hängen ja mit dem Index k von $\tilde{C}_{k,n}^i$ zusammen, der durch (II.6.9) nicht betroffen wird. Damit erhalten die Summenregeln aus der Stromalgebra bzw. Relationen, wie sie z.B. aus dem Partonmodell folgen, asymptotisch ihre Gültigkeit bei [II.6.2].

Die Renormierungsgruppe liefert nur Aussagen über die Impulsabhängigkeit von $M_n(Q^2)$. Um diejenige der Strukturfunktionen $W(x, Q^2)$ zu erhalten, ist eine inverse Mellin-Transformation nötig [II.6.3].

$$M_n(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} W(x, Q^2)$$

$$W(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} d\alpha x^{-\alpha} M_n(Q^2)$$
(II.6.10)

In der Praxis wird man $W(x, Q_0^2)$ für ein Q_0^2 möglichst genau bestimmen. Daraus folgt dann $M_n(Q_0^2)$ für alle n . Die Impulsabhängigkeit dieser Momente ergibt sich aus (II.6.5). Aus diesem Ergebnis erhält man dann nach (II.6.10) die Größe $W(x, Q^2)$.

II.6.3. Ergebnisse

A) Asymptotisch freie Theorie

Als asymptotisch freie Theorie wird die QCD [II.6.4] verwandt. Die Partonen tragen eine innere $SU(N_f) \times SU(N_c)$ Symmetrie für Flavor- und Colorfreiheitsgrade. Die Colorgruppe ist geeicht und die minimale Kopplung der Partonströme an die Eichfelder $\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\sigma}{2} \psi A^{\mu a}$ soll die starke Wechselwirkung vermitteln.

Die Impulsabhängigkeit der Momente wird allgemein gegeben durch (siehe Anhang A3)

$$M_n(Q^2) = M_n^{NS}(Q_0^2) \left[\frac{e_n(Q^2/\Lambda^2)}{e_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-\alpha_{NS}^{(n)}}$$

$$+ M_n^+(Q_0^2) \left[\frac{e_n(Q^2/\Lambda^2)}{e_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-\alpha_+^{(n)}}$$

$$+ M_n^-(Q_0^2) \left[\frac{e_n(Q^2/\Lambda^2)}{e_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-\alpha_-^{(n)}}$$
(II.6.11)

Für $n = 1$ und 2, also für die Matricelemente der Ströme und des Energie-Impuls-Tensors verschwinden die anomalen Dimensionen.

$n = 1$ liefert die wegen $\bar{\Gamma}^{(n)}(\rho, \bar{g}(\rho) \neq 0, \mu)$ modifizierten Summenregeln [II.6.5]

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x} \left[F_2^{\bar{\nu}P}(x, Q^2) - F_2^{\nu P}(x, Q^2) \right] = 2 \bar{I}_3(\rho) = 1$$
(II.6.12)

(Adler Summenregel)

$$\int_0^1 dx \left[F_1^{\nu\rho}(x, Q^2) - F_1^{\nu\rho}(x, Q^2) \right] = 2 \bar{I}_3(\rho) \left[1 - \frac{1}{2} \bar{\alpha}(Q^2) C_2(R) + O(\bar{\alpha}^2) \right] \quad (\text{II.6.13})$$

(Bjorken backward)

$$\int_0^1 dx \left[F_3^{\nu\rho}(x, Q^2) + F_3^{\nu\rho}(x, Q^2) \right] = -6 B(\rho) \left[1 - \frac{5}{8} \bar{\alpha}(Q^2) C_2(R) + O(\bar{\alpha}^2) \right] \quad (\text{II.6.14})$$

(Groß-Llewellyn-Smith Summenregel)

Es wurde $\bar{\alpha}(Q^2) = \frac{1}{4\pi} \bar{g}^2(Q^2)$ gesetzt. Wegen $C_2(R)$ siehe Anhang A3.

Die Adler Summenregel (II.6.12) folgt aus der Isospinalgebra und wird deshalb in der betrachteten Ordnung nicht abgeändert. Die Bjorken-backward Summenregel (II.6.13) folgt aus (II.6.12) mit Hilfe der Callan-Groß-Relation. Die Abweichung von $2 \bar{I}_3(\rho)$ entspricht also der Verletzung der Callan-Groß-Relation (siehe (II.6.16)). Für heutige Energien sollten die Abweichungen sowohl der Bjorken- als auch der Groß-Llewellyn-Smith Summenregel (II.6.14) vom asymptotischen Wert 1 bzw. -6 ca. 15 % betragen [II.6.6]. Die Genauigkeit der Neutrinoexperimente reicht jedoch augenblicklich noch nicht aus, um diesen Effekt festzustellen.

Da sich die Momente der longitudinalen Strukturfunktion F_5 ($F_5 = F_2 - 2x F_1$) und der Strukturfunktion F_2 nur durch die Lorentzstruktur unterscheiden, fallen die Abhängigkeiten von den anomalen Dimensionen im Quotienten heraus. Es gilt

$$\frac{M_5^n(Q^2)}{M_2^n(Q^2)} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{\hat{C}_5^{(n)}(Q^2)}{\hat{C}_2^{(n)}(Q^2)} = \bar{\alpha}(Q^2) \frac{C_2(R)}{n+1} + O(\bar{\alpha}^2) \quad (\text{II.6.15})$$

Mit Hilfe des Faltungstheorems für Mellin-Transformationen folgt daraus

$$F_5(x, Q^2) = \bar{\alpha}(Q^2) C_2(R) x^2 \int_x^1 \frac{\alpha x'}{(x')^3} F_2(x', Q^2) + O(\bar{\alpha}^2) \quad (\text{II.6.16})$$

Falls, wie es die Regge Theorie erwarten läßt, $F_2(x) \sim \sqrt{x}$

für $x \rightarrow 0$, so gilt

$$\frac{F_S(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \bar{\alpha}(Q^2) C_2(R) \quad (\text{II.6.17a})$$

während für $F_2(x) \sim (1-x)^\alpha$ für $x \rightarrow 1$ folgt, daß

$$\frac{F_S(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\alpha} \bar{\alpha}(Q^2) C_2(R) (1-x) \quad (\text{II.6.17b})$$

Asymptotisch gilt übrigens wieder $F_S(x, Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$ wegen $\bar{\alpha}(\infty) = 0$.

Für $n = 2$ sei die Summenregel für das Matrixelement des Energie-Impuls-Tensors genannt. Für Gell-Mann-Zweig Quarks wird der Impuls-anteil, der asymptotisch von Quarks getragen wird, durch

$$r_{Q \rightarrow \infty} = \frac{4}{3} \int dx \left[6(F_2^{ep}(x, Q^2) + F_2^{en}(x, Q^2)) - (F_2^{vp}(x, Q^2) + F_2^{vn}(x, Q^2)) \right] \quad (\text{II.6.18})$$

gegeben. Die Matrix der anomalen Dimensionen hat für $n = 2$ die Form (siehe Anhang A3)

$$\underline{\gamma}^{(2)} = \frac{2}{3} \left(\frac{g^2}{4\pi^2} \right) \begin{pmatrix} 2C_2(R) & -T(R) \\ -2C_2(R) & T(R) \end{pmatrix} \quad (\text{II.6.19})$$

und besitzt als niedrigsten Eigenwert den zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gehörenden Wert 0. Es handelt sich dabei also um den Energie-Impuls-Tensor.

In niedrigster Ordnung tragen nur die Quarks zum Streuprozess und damit zu $\tilde{C}_n^i$ bei, also gilt $\tilde{C}_{q,\theta}^i(q^2, 0, 0, \mu) = 1$ und $\tilde{C}_{G,\theta}^i(q^2, 0, 0, \mu) = 0$. Damit folgt aus (II.6.9)

$$\begin{aligned} M_{\theta}^{(2)}(Q^2) &\simeq (1, 0) \frac{1}{2C_2(R) + T(R)} \begin{pmatrix} T(R) & T(R) \\ 2C_2(R) & 2C_2(R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_q \\ \theta_G \end{pmatrix} + O(\bar{\alpha}^2) \\ &= \frac{T(R)}{2C_2(R) + T(R)} (\theta_q + \theta_G) + O(\bar{\alpha}^{0.62}) \end{aligned} \quad (\text{II.6.20})$$

Der Impulsanteil r beträgt also

$$r = \frac{T(R)}{Q^2 \rightarrow \infty \quad 2C_2(R) + T(R)} = \frac{N_f N_c}{2N_c^2 + N_c N_f - 2} = \begin{cases} \frac{9}{25} = 0,36 & SU(3_f) \times SU(3_c) \\ \frac{3}{7} = 0,43 & SU(4_f) \times SU(3_c) \end{cases} \quad (\text{II.6.21})$$

B) Theorie mit endlichem Fixpunkt

Zunächst hat man für die Impulsabhängigkeit der Momente eine Potenzabhängigkeit von Q^2 .

$$\begin{aligned} M_n(Q^2) &= M_n^{us}(Q_0^2) \left(Q^2/Q_0^2\right)^{-\frac{1}{2} \delta_{us}^{(n)}(g_c)} \\ &+ M_n^+(Q_0^2) \left(Q^2/Q_0^2\right)^{-\frac{1}{2} \delta_+^{(n)}(g_c)} \\ &+ M_n^-(Q_0^2) \left(Q^2/Q_0^2\right)^{-\frac{1}{2} \delta_-^{(n)}(g_c)} \end{aligned} \quad (\text{II.6.22})$$

Vergleiche dazu (II.6.12).

Weitergehende Aussagen lassen sich machen, falls man die etwas gewagte Annahme macht, daß $\delta^{(n)}(g_c)$ durch den 1-Loop Beitrag gegeben ist [II.6.7]. In diesem Fall sind die $\delta^{(n)}(g_c)$ bei vorgegebenem g_c bekannt (siehe Anhang A3).

Man kann ebenfalls den von den Fermionen getragenen Energiebruchteil angeben

$$\begin{aligned} \text{Vektorgluonen} \quad r &= \frac{T(R)}{T(R) + 2C_2(R)} \\ \text{Skalare Gluonen} \quad r &= \frac{6T(R)}{6T(R) + C_2(R)} \end{aligned} \quad (\text{II.6.23})$$

Die Summenregeln werden auch asymptotisch von den Vorhersagen freier Theorien abweichen, da man $\bar{\Gamma}^{(n)}(\rho, g_c, O_1/\mu)$ zu berechnen hat, also den Wert für endliche starke Wechselwirkung ($g_c \neq 0$).

II.7 Bedingungen für die Gültigkeit von Summenregeln und Relationen zwischen Strukturfunktionen

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse der vorangegangenen Paragraphen. Die dort vorkommenden Summenregeln und Relationen werden zusammen mit den Bedingungen aufgeführt, die für ihre Gültigkeit notwendig sind.

A) Wechselwirkungsfreie Theorie

Die wichtigste Voraussetzung der Abschnitte II.2 bis II.4 war die Annahme, daß zur Herleitung der Ergebnisse Relationen aus wechselwirkungsfreien Theorien verwendet werden dürfen. So wurde eine Wechselwirkung der Partonen untereinander bzw. eine Modifizierung von Vertauschungsrelationen durch Wechselwirkungen im allgemeinen vernachlässigt. Die Ergebnisse der Abschnitte II.5 und II.6 rechtfertigen diese Annahme für den Fall, daß die starke Wechselwirkung durch eine asymptotisch freie Feldtheorie beschrieben werden kann. In diesem Fall verschwindet der Einfluß der starken Wechselwirkung für hohe Energien ($\alpha_s(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$). Dabei deutet die experimentell beobachtete näherungsweise Skaleninvarianz darauf hin, daß bereits für Impulsüberträge Q^2 von einigen $(\text{GeV}/c)^2$ die starke Wechselwirkung als "kleine Störung" behandelt werden kann ($\alpha_s(Q^2) \approx .2 \text{ -- } .3$ für $Q^2 \approx 10 (\text{GeV}/c)^2$). Wird die starke Wechselwirkung dagegen durch eine Feldtheorie mit endlichem ultravioletten Fixpunkt beschrieben oder ist sie gar ultraviolett instabil, so verliert die Annahme der Quasifreiheit vermutlich ihre Berechtigung.

B) CVC Hypothese

Um einen Vergleich zwischen elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen zu ermöglichen wurde die CVC Hypothese (siehe II.2.3) verwandt, nach der die Vektoranteile der geladenen schwachen Ströme ($V_\mu^\pm$) und der Isektoranteil des elektromagnetischen Stromes die Komponenten eines einzigen Isektorstromes darstellen. Modifikationen, wie sie z.B. die Cabibbo Theorie einführt, spielen wegen der Kleinheit des Cabibbo-Winkels ($\theta_c \approx 14^\circ$) für den totalen Wirkungsquerschnitt keine wesentliche Rolle (Anteil $< 5\%$) und wurden deshalb vernachlässigt.

C) Isodublett

Zusätzlich zur CVC Hypothese wird gefordert, daß Proton und Neutron in guter Näherung ein Isodublett bezüglich des (schwachen) Isospins darstellen. Die Einschränkungen, die sich daraus für die Quantenzahlen der Partonen ergeben, sind unter (II.2.26) und (II.2.27) aufgeführt.

Die Annahme des Isodubletts führt zusammen mit der CVC Hypothese auf die sogenannten Ladungssymmetrien $F_i^{\nu\rho} = F_i^{\bar{\nu}\rho}$ und $F_i^{\bar{\nu}\rho} = F_i^{\nu\bar{\rho}}$ (II.1.14) (diese Relationen folgen eigentlich schon aus schwächeren Annahmen als CVC).

D) (V-A) Kopplung

Für den schwachen geladenen Strom wird eine reine (V-A)Kopplung angenommen ($I_R = 0$ in II.2.3).

Mit Hilfe dieser vier Annahmen lassen sich die folgenden Relationen und Summenregeln im Rahmen eines Partonmodells ableiten.

1) Adler Summenregel

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x} [F_2^{\bar{\nu}\rho}(x, Q^2) - F_2^{\nu\rho}(x, Q^2)] = 1 \quad (\text{II.7.1})$$

Siehe (II.2.47), (II.3.20), (II.4.32) und (II.6.12). Die Summenregel folgt aus der Isospinalggebra $[\hat{I}, \hat{I}] = 2I_3$ und gilt auch für endliche Q^2 , unabhängig von Verletzungen des Skalenverhaltens (siehe Abschnitt II.3.3). Sie scheint experimentell erfüllt zu sein [II.7.1].

2) Callan-Groß-Relation

$$F_5(x) = F_2(x) - 2x F_1(x) = 0 \quad (\text{II.7.2})$$

Siehe (II.2.33), (II.3.24), (II.4.21), (II.6.17). Die Relation folgt aus der Spin $S = \frac{1}{2}$ Natur der Konstituenten, sofern man die Wechselwirkung der Konstituenten untereinander vernachlässigen kann. Zur experimentellen Situation siehe Paragraph V.1.

3) Verhältnis von Neutrino- und Antineutrino-Streuequerschnitt

$$\sigma^{\bar{\nu}} / \sigma^{\nu} = 1/3 \quad (\text{II.7.3})$$

Siehe (V.2.6). Die Beziehung gilt für isoskalar Target, Spin - $\frac{1}{2}$ Konstituenten und verschwindendem Impulsanteil an Antipartonen im Hadron ($xN(x) \approx 0$). Experimentell: siehe V.2.

4) Bjorken-backward-Summenregel

$$\int_0^1 dx [F_1^{\bar{\nu}P}(x) - F_1^{\nu P}(x)] = 1 \quad (\text{II.7.4})$$

Siehe (II.2.46), (II.3.18), (II.4.32) und (II.6.13). Die Summenregel folgt aus der Adler Summenregel (II.7.1) (Isospinalgabra) und der Callan-Groß-Relation (II.7.2) (Spin $\frac{1}{2}$ Konstituenten).

Im folgenden werden stets Spin $\frac{1}{2}$ Konstituenten vorausgesetzt.

5) Groß-Llewellyn-Smith-Summenregel

$$\int_0^1 dx [F_3^{\nu P}(x) + F_3^{\bar{\nu}P}(x)] = \begin{cases} -6 \text{ GMZ} \\ -2 \text{ Sakata} \end{cases} \quad (\text{II.7.5})$$

Siehe (II.2.42), (II.3.19), (II.4.33) und (II.6.14). Die Summenregel ist darstellungsabhängig. Im Rahmen der Stromalgebra folgt der Wert aus den d-Strukturkonstanten der Flavorgruppe $SU(N_F)$. Im Partonmodell zählt die Summenregel den mit einem Isospinfaktor $2 \left[\overline{I}_{L,R}^i (\overline{I}_{L,R}^i + 1) - (I_{L,R}^i)^2 \right]$ gewichteten Überschuß an V+A koppelnden Partonen gegenüber den mit V-A koppelnden Partonen. GMZ: das Proton besteht aus 3 Valenzpartonen mit jeweils Isospin $I = \frac{1}{2}$. Experimentell: siehe (V.3.11).

6) Llewellyn-Smith-Relation

$$\frac{F_1^{\nu P}(x) - F_1^{\bar{\nu}P}(x)}{F_3^{\nu P}(x) - F_3^{\bar{\nu}P}(x)} = \frac{1}{2x} \frac{F_2^{\nu P}(x) - F_2^{\bar{\nu}P}(x)}{F_3^{\nu P}(x) - F_3^{\bar{\nu}P}(x)} = \frac{1}{4} Y_i \quad (\text{II.7.6})$$

Siehe (II.2.39), (II.3.27) und (II.4.26). Die Relation folgt aus dem

Partonmodell falls alle Partonen mit Isospin $I \neq 0$ dieselbe Hyperladung Y_1 tragen. Experimentell: noch nicht getestet.

7) Summe der Ladungsquadrate

$$\frac{F_1^{ep}(x) + F_1^{en}(x)}{F_1^{vp}(x) + F_1^{vn}(x)} = \frac{F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)}{F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)} = \frac{1}{4} (1 + Y_1^2) \quad (\text{II.7.7})$$

Siehe (II.2.37), (II.3.30) und (V.3.7). Die Form (II.7.7) gilt falls alle Partonen Isodubletts mit derselben Hyperladung Y_1 darstellen.

Man erhält eine untere Schranke $\geq \frac{1}{4}$ aus CVC und der Annahme, daß der Vektor-Vektor- und der Axialvektor-Axialvektor-Anteil der schwachen Wechselwirkung gleich groß sind.

5/18 (GMZ) folgt aus der zusätzlichen Annahme, daß der Isoskalarbeitrag der elektromagnetischen Wechselwirkung ca. 10% des Isektorbeitrages ausmacht (Isoskalarunterdrückung) (siehe (V.3.8)).

Experimentell: siehe V.3.

8)

$$\frac{F_1^{vp}(x) - F_1^{vn}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{F_2^{vp}(x) - F_2^{vn}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} = -\frac{1}{2} \quad (\text{II.7.8})$$

Siehe (II.2.48). Die Relation gilt für isoskalare Antipartonverteilung $\bar{N}^i(x)$ im Hadron. Experimentell: noch nicht getestet.

9)

$$\int_0^1 dx [F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)] = 2 \quad (\text{II.7.9})$$

Siehe (II.2.49). Diese Summenregel folgt aus (II.7.8) (isoskalares $\bar{N}^i(x)$) und der Adler-Summenregel (II.7.1) (Isospinalgabra).

Experimentell: noch nicht getestet.

10)

$$\frac{F_1^{eP}(x) - F_1^{en}(x)}{F_1^{vP}(x) - F_1^{vn}(x)} = \frac{F_2^{eP}(x) - F_2^{en}(x)}{F_2^{vP}(x) - F_2^{vn}(x)} = -\frac{1}{2} Y_i \quad (\text{II.7.10})$$

Siehe (II.2.40). Die Summenregel folgt für isoskalare Antipartonverteilung $\bar{N}^i(x)$ und der Annahme, daß alle Partonen mit Isospin $I \neq 0$ dieselbe Hyperladung Y_i besitzen. Experimentell: noch nicht getestet.

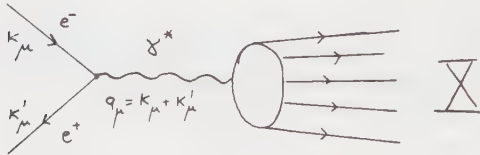
11)

$$\int_0^1 dx [F_1^{eP}(x) - F_1^{en}(x)] = \int_0^1 \frac{dx}{2x} [F_2^{eP}(x) - F_2^{en}(x)] = \frac{1}{2} Y_i \quad (\text{II.7.11})$$

Siehe (II.2.41). Die Summenregel folgt aus (II.7.10) (isoskalares $\bar{N}_1$, alle Y_i gleich) mit Hilfe der Adler-Summenregel (Isospinalggebra) (II.7.1) bzw. der Bjorken backward Summenregel (II.7.4) (Isospinalggebra) und Spin $S = \frac{1}{2}$ Konstituenten). Experimentell: siehe (II.3.4).

III. Elektron-Positron-Vernichtung $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

III.1. Kinematik



k_μ	Impuls des Elektrons
k'_μ	Impuls des Positrons
q_μ	Impuls des Photons
$q^2 = s$	Quadrat der Schwerpunktsenergie

In niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Wechselwirkung erfolgt der Prozeß durch Paarvernichtung von Elektron und Positron. Das dabei entstandene virtuelle Photon γ^* fragmentiert anschließend in den hadronischen Endzustand X .

Die Gültigkeit der QED wurde für raumartige Impulse $q^2 > 0$ in rein leptonischen Prozessen wie $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Møller Streuung), $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Bhabha Streuung), $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ (2 Photon Erzeugung) für Schwerpunktsenergien bis zu 7 - 8 GeV getestet [III.1.1]. Neuere Tests bei 13 und 17 GeV wurden bei PETRA [III.1.2] unternommen. Es konnten keine Abweichungen von den theoretischen Vorhersagen festgestellt werden. Modifiziert man den Photonpropagator gemäß

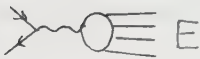
$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{1}{q^2} \pm \frac{1}{q^2 - \Gamma_1^2} \quad (\text{III.1.1})$$

was einem Formfaktor des Typs

$$F(q^2) = 1 \pm \frac{q^2}{q^2 - \Gamma_1^2} \quad (\text{III.1.2})$$

entspricht [III.1.3], so ergeben die Experimente Grenzen von $\sqrt{s} \gtrsim 10$ GeV, mit PETRA-Daten sogar $\sqrt{s} \gtrsim 20$ GeV. Durch Längen ausgedrückt, entspricht das einer Gültigkeit der QED bis hinab zu Abständen von ca. 10^{-15} cm. Man kann also zu Recht annehmen, den leptonischen Anteil des Prozesses zu verstehen.

Anders als bei der tiefinelastischen Streuung ist der 2-Photon-Prozeß hier nicht unterdrückt



$$1 \text{ Photonprozeß} \propto \frac{\alpha^2}{E^2}$$

(III.1.3)



E

$$2 \text{ Photonprozeß} \propto \alpha^4 \ln^2\left(\frac{E}{m_e}\right)$$

Bei hohen Energien wird dieser Prozeß dominieren. Doch werden die Hadronen aus dem 2-Photon-Prozeß bevorzugt in Strahlrichtung produziert. Bei heutigen Energien und mit den heutigen Detektoren kann man den Beitrag dieses Prozesses deshalb ignorieren.

Der Wirkungsquerschnitt in der 1-Photon Näherung ist durch

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Tot}}(s) &= \frac{16\pi^2\alpha^2}{3s^2} \int dy e^{iqy} \langle 0 | J_\mu(y) J^\mu(0) | 0 \rangle \\ &= \frac{16\pi^2\alpha^2}{3s^2} \int dy e^{iqy} \langle 0 | [J_\mu(y), J^\mu(0)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

gegeben. Da die Energie der hadronischen Endzustände positiv sein muß, trägt $\langle 0 | J_\mu(0) J^\mu(y) | 0 \rangle$ nichts bei und man kann das Produkt der Ströme durch den Kommutator ersetzen (siehe auch Diskussion im Anschluß an (II.1.5)).

Die Aussagen über die Hadronen und ihre Wechselwirkungen sind im Matrixelement der Ströme enthalten, das im Rahmen von Modellen berechnet werden muß.

Im Schwerpunktsystem gilt $q_\mu = (\sqrt{s}, 0, 0, 0)$. Für $q^2 \rightarrow \infty$ oszilliert der Faktor $\exp[iq' y]$ immer schneller als Funktion von y . Der Hauptbeitrag zum Integral in (III.1.4) wird deshalb von einem Bereich $y_0 = O(\frac{1}{q_0}) \rightarrow 0$ herrühren. Der Prozeß testet somit das Verhalten der Matrixelemente für

$$0 \leq y^2 \leq y_0^2 = O\left(\frac{1}{s}\right) \rightarrow 0 \quad (\text{III.1.5})$$

also an der Spitze des Lichtkegels und nicht entlang des gesamten Lichtkegels, wie dies bei der tiefinelastischen Streuung der Fall war.

III.2. Das Partonmodell [III.2.1]

Wie im Falle der tiefinelastischen Streuung in Paragraph II.2, wird auch hier der volle Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ in einen freien Anteil $\mathcal{H}_0$ und einen Wechselwirkungsanteil $\mathcal{H}_I$ zerlegt. Man definiert formal einen Anzugsoperator $U(t)$, der eine Transformation zwischen Heisenberg- und Wechselwirkungsbild bewirkt

$$U(t) = T \left[\exp(-i \int_{-\infty}^t \mathcal{H}_I(\tau) d\tau) \right] \quad (\text{III.2.1})$$

und drückt mit seiner Hilfe den vollen, hadronischen Strom

$J_\mu(y)$ durch den mit Hilfe von $\mathcal{H}_0$ aus den Konstituenten gebildeten Strom $j_\mu(y)$ aus.

$$J_\mu(y) = U^{-1}(t) j_\mu(y) U(t) \quad (\text{III.2.2})$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} \int dy e^{iqy} \langle 0 | J_\mu(y) J^\mu(x) | 0 \rangle &= (2\pi)^4 \sum_{\vec{x}} \delta^4(q + p_{\vec{x}}) \langle 0 | j_\mu(0) | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | J^\mu(0) | 0 \rangle \quad (\text{III.2.3}) \\ &= (2\pi)^4 \sum_{\vec{x}} \delta^4(q + p_{\vec{x}}) \langle 0 | j_\mu(0) | u \vec{x} \rangle \langle u \vec{x} | j^\mu(0) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt II.2 für tiefinelastische Streuungen, kann man auch hier schließen, daß im Falle beschränkter Transversalimpulse $E_{\bar{X}} \simeq E_{u\bar{X}}$ gilt und man (III.1.4) deshalb auch schreiben kann als

$$\sigma_{TOT}(s) = \frac{16\pi^2\alpha^2}{3s^2} \int d\varphi e^{i\varphi} \langle 0 | [j_\mu(\varphi), j^\mu(0)] | 0 \rangle \quad (\text{III.2.4})$$

Die Summe über alle möglichen Hadronzustände wird also ersetzt durch die Summe über alle möglichen Konstituenten. Graphisch ausgedrückt

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{X}} \left| \text{Diagram} \right|^2 &\simeq \sum_{\text{Konstituenten}} \left| \text{Diagram} \right|^2 \\ &= \sum_a \text{Diagram} \end{aligned} \quad (\text{III.2.5})$$

Üblicherweise normiert man den Wirkungsquerschnitt bezüglich der Erzeugung von $\mu^+ \mu^-$ -Paaren und erhält damit

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{X})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin } 0} e_i^2 + \sum_{\text{Spin } \frac{1}{2}} e_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin } 1} e_k^2 \left(\frac{s}{m_k^2} \right) \quad (\text{III.2.6})$$

Konstit. Konstit. Konstit.

Bemerkungen

Während für tiefinelastische Streuungen die Konstituenten der Nukleonen für raumartige Impulsüberträge $q^2 < 0$ untersucht wurden, erhält man hier, wegen der Dominanz von Pionen im Endzustand, eher Aussagen über die Konstituenten der Pionen für zeitartige Impulsüberträge $q^2 > 0$.

Für endliche q^2 hat man in III.2.5 nur über solche Partonen zu summieren, die in den möglichen hadronischen Endzuständen vorkommen können. Partonen, die nur in sehr schweren Hadronen vorkommen, müssen erst oberhalb der Schwelle für die Produktion dieser Teilchen berücksichtigt werden.

Für Spin-1 Partonen wurde wieder minimale Kopplung angenommen. Ihr Auftreten verletzt die Skaleneigenschaft von $R(s)$. Durch Einführung zusätzlicher Eichteilchen und/oder einer abgeänderten Kopplung läßt sich dieses Verhalten für $s \rightarrow \infty$ beseitigen [III.2.2].

III.3. Lichtkegelentwicklung

Wie aus (III.1.5) ersichtlich, erwartet man, daß die Größe des Wirkungsquerschnittes durch das Verhalten des Kommutators am Lichtkegel bestimmt wird. In einem Modell mit freien Spin $s = \frac{1}{2}$ Konstituenten erhält man für den Kommutator

$$[J_\mu(y), J_\nu(0)] \underset{y_\mu \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i}{6\pi^3} \left(\sum_i e_i^2 \right) (g_{\mu\nu} y^2 - y_\mu y_\nu) \epsilon(y_0) \delta'''(y^2) \dots \quad (\text{III.3.1})$$

Eingesetzt in (III.1.4) erhält man

$$R(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\text{Spin } \frac{1}{2} \\ \text{Konstituenten}}} e_i^2 \quad (\text{III.3.2})$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat des Partonmodells (III.2.6).

Die Berücksichtigung einer Wechselwirkung der Konstituenten untereinander würde den kanonischen Wert (III.3.1) abändern und auf diese Weise auch zu einem veränderten Wert für $R(s)$ führen.

III.4. Asymptotisches Verhalten von R und Renormierungsgruppe

Die Einbeziehung einer Wechselwirkung der Partonen untereinander in die Berechnung von $R(s)$ wird ein von (III.3.2) abweichendes Resultat liefern. Eine störungstheoretische Berechnung der Korrekturen muß jedoch mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen verbessert werden, um eine Aussage für $s \rightarrow \infty$ zu ermöglichen. Siehe dazu Abschnitt III.6.1.

Setzt man $R(s)$ ins Komplexe fort, so ist $R(q^2)$ bis auf Faktoren gleich dem Imaginärteil der verbundenen Zweipunktfunktion der Stromoperatoren im Impulsraum.

$$R(q^2) = 24\pi^2 \operatorname{Im} \Pi(q^2) \quad (\text{III.4.1})$$

$$(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) = i \int d^4y e^{iqy} \langle 0 | T(J_\mu(y) J_\nu(0)) | 0 \rangle$$

R genügt deshalb einer Renormierungsgruppengleichung. [III.4.1].

Da die J_μ erhaltene Ströme sind, verschwinden die anomalen Dimensionen ($\gamma_J = 0$) und die Gleichung lautet

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_1(g, e, m_i, \mu) \frac{\partial}{\partial g} + \beta_2(g, e, m_i, \mu) \frac{\partial}{\partial e} + m_i \gamma_{m_i}(g, e, m_i, \mu) \frac{\partial}{\partial m_i} \right] R(q^2, g, e, m_i, \mu) = 0 \quad (\text{III.4.2})$$

Für heute erreichbare Energien kann man höhere Ordnungen in der elektromagnetischen Kopplung vernachlässigen. Das bedeutet, daß $\beta_2 = 0$ ist und keine gleitende Kopplungskonstante $\bar{e}(\lambda)$ auftritt. Die Lösung von (III.4.2) lautet (siehe Anhang A2)

$$R(e^{2\lambda} q^2, g, e, m_i, \mu) = R(q^2, \bar{g}(\lambda), e, \bar{m}_i(\lambda) e^{-\lambda}, \mu) \quad (\text{III.4.3})$$

$$\frac{\alpha \bar{g}(\lambda)}{\alpha \lambda} = \beta_1(\bar{g}(\lambda), e, \bar{m}_i(\lambda), \mu)$$

$$\frac{\alpha \bar{m}_i(\lambda)}{\alpha \lambda} = \gamma_{m_i}(\bar{g}(\lambda), e, \bar{m}_i(\lambda), \mu)$$

Existiert ein ultravioletter Fixpunkt

$$\bar{g}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} g_c \quad (\text{III.4.4})$$

so läßt sich R in eine Potenzreihe von $(\bar{g}(\lambda) - g_c)$ entwickeln. Der Einfachheit halber soll dabei angenommen werden, daß Massen asymptotisch keine Rolle spielen, eine in endlicher Ordnung Störungstheorie gültige Annahme.

$$R(e^{2\lambda} q^2, g, e, m_i, \mu) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} R(q^2, g_c, e, 0, \mu) + [\bar{g}(\lambda) - g_c] R'(q^2, g_c, e, 0, \mu) \quad (\text{III.4.5})$$

+

Im Falle asymptotisch freier Theorien hat man $g_c = 0$ und die Reihe lautet

$$R(e^{2\lambda} q^2, g, e, m_i, \mu) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} R(q^2, 0, e, 0, \mu) + \frac{1}{2} \bar{g}^2(\lambda) R''(q^2, 0, e, 0, \mu) + \dots \quad (\text{III.4.6})$$

$$= \left(\sum_i e_i^2 \right) \left[1 + a \bar{g}^2(\lambda) + \dots \right] \quad (\text{für } s = \frac{1}{2})$$

Bemerkungen

In einer asymptotisch freien Theorie ist der Wert von R für $\lambda \rightarrow \infty$ durch den Wert der entsprechenden wechselwirkungsfreien Theorie gegeben. Der Grenzwert von R kann also mit der Summe der Ladungsquadrate der Konstituenten identifiziert werden.

Existiert ein endlicher Fixpunkt, so strebt R gegen einen festen Wert, der jedoch nichts mit der Summe der Ladungsquadrate zu tun hat, da endliche Korrekturen wegen $g_c \neq 0$ hinzukommen.

Daß R beim Vorhandensein eines Fixpunktes gegen eine Konstante strebt, liegt daran, daß der elektromagnetische Strom erhalten ist und deshalb nicht renormiert wird. Deshalb gilt auch $\gamma_3 = 0$. Andernfalls würde ein zusätzlicher Faktor $\exp\left[2 \int_0^\lambda \gamma_3(\tau) d\tau\right]$ auftreten und das Skalenverhalten von R zerstören.

Fehlt ein ultravioletter Fixpunkt, so wird $\bar{g}(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ divergieren (siehe Anhang A2) und eine Aussage über das Verhalten von R auf störungstheoretischem Niveau unmöglich machen.

III.5. Methoden zum Vergleich von Theorie und Experiment

Im Gegensatz zur tiefeinelastischen Streuung ist es hier nicht so problemlos, Theorie und Experiment zu vergleichen. Der Grund dafür ist, daß das Experiment $R(q^2)$ für $q^2 = s > 0$ liefert, also für q^2 auf der positiv reellen Achse. Dort treten aber Singularitäten wie Pole und Schnitte auf, die von der Erzeugung reeller Teilchen herrühren. Störungstheorie und Renormierungsgruppe liefern nur für Impulse im Tief-Euklidischen, also für $q^2 \rightarrow -\infty$, verlässliche Resultate, da hier keine Singularitäten auftreten.

Normalerweise geht man recht naiv vor und setzt das störungstheoretische Ergebnis einfach nach $q^2 = s > 0$ fort. Für jede Energie $\sqrt{s}$ existieren aber Graphen höherer Ordnung, die eine Vielfacherzeugung von Konstituenten beschreiben und in der Nähe dieser Energie gerade Schwellensingularitäten aufweisen. Höhere Ordnungen in der Störungstheorie wird man deshalb im allgemeinen nicht vernachlässigen können und das Verfahren ist etwas fragwürdig [III.5.1].

Will man diese Probleme vermeiden, so kann man die experimentellen Werte mit Hilfe einer Dispersionsrelation ins Tief-Euklidische ($q^2 < 0$) fortsetzen und dort mit den theoretischen Vorhersagen vergleichen.

$$\overline{\Pi}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im } \overline{\Pi}(s)}{s + Q^2} = \frac{1}{24\pi^2} \int ds \frac{R(s)}{s + Q^2} \quad (\text{III.5.1})$$

$$Q^2 = -q^2 > 0$$

Abwandlungen davon sind die Verwendung der Adler'schen D-Funktion [III.5.2]

$$D(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s) ds}{(s + Q^2)^2} = \frac{1}{24\pi^2} Q^2 \frac{d}{ds} \overline{\Pi}(s) \Big|_{s=Q^2} \quad (\text{III.5.2})$$

durch de Rujula und H. Georgi [III.5.3] oder die Definition eines über ein bestimmtes Gebiet gemitteltes $R(s)$

$$\bar{R}(s, \Delta) := \frac{\Delta}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{R(s')}{(s-s')^2 + \Delta^2} \quad (\text{III.5.3})$$

durch Poggio, Quinn und Weinberg [III.5.4]. Man überzeugt sich leicht, daß

$$2i \bar{R}(s, \Delta) = \overline{\Pi}(s+i\Delta) - \overline{\Pi}(s-i\Delta) \quad (\text{III.5.4})$$

gilt, so daß auch hier wieder das Grundprinzip (III.5.1) angewandt wird.

All diesen Methoden ist gemeinsam, daß wegen der Benutzung einer Dispersionsrelation $R(s)$ für alle $s > 0$ bekannt sein müßte. In der Praxis sind deshalb Annahmen über den Verlauf von $R(s)$ außerhalb des bekannten Gebietes nötig. Andererseits erhält man wegen der Positivität von R eine untere Schranke, falls man nur über die bekannten Energiebereiche integriert.

III.6. Der Wert von R und die Vektormesonen

Abschließend soll noch eine mehr phänomenologische Bestimmung von R durch Terazawa [III.6.1] angegeben werden. Dabei wird Gebrauch gemacht von der anomalen PCDC Ward Identität [III.6.2] (PCDC = partially conserved dilatation current).

Unter Verwendung der Größen

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(q_1, q_2) &= \int d^4y d^4z e^{i[q_1(y-z) + q_2 z]} \langle 0 | T(J_\mu(y) J_\nu(0) \theta_\lambda^1(z)) | 0 \rangle \\ \overline{\Pi}_{\mu\nu}(q) &= i \int d^4y e^{iqy} \langle 0 | T(J_\mu(y) J_\nu(0)) | 0 \rangle \\ \Delta_{\mu\nu}(q, q) &= -(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Delta(q^2) \\ \overline{\Pi}_{\mu\nu}(q) &= -(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \overline{\Pi}(q^2) \end{aligned} \quad (\text{III.6.1})$$

läßt sich zeigen, daß folgende Beziehung gilt [III.6.2]

$$\Delta(q^2) = -2q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} \Pi(q^2) - \frac{R}{6\pi^2} \quad (\text{III.6.2,})$$

falls $J_\mu(q)$ kanonische Skalendimension besitzt.

Die exakte Definition von R ist dabei entweder durch die Wilson-Entwicklung gegeben

$$T(J_\mu(q) J_\nu(0)) \underset{q^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{R}{12\pi^4} (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \left(\frac{1}{q^2 - i\varepsilon} \right) + \dots \quad (\text{III.6.3a})$$

oder durch

$$\begin{aligned} R &\underset{q^2 \rightarrow -\infty}{=} \lim R(q^2) \\ R(q^2) &= 24\pi^2 \operatorname{Im} \Pi(q^2) \end{aligned} \quad (\text{III.6.3b})$$

Man erhält also

$$\Delta(0) = -\frac{R}{6\pi^2} \quad (\text{III.6.4})$$

Nimmt man die Vektormesondominanz [III.6.3] für die hadronische Wechselwirkung des Photons zu Hilfe und betrachtet als dominanten Beitrag zunächst nur das ϱ Meson, so gilt

$$\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \Delta_{\mu\nu}(q_1, q_2) = -\frac{1}{f_\varrho^2} \left(\frac{m_\varrho^2}{m_\varrho^2 - q^2} \right)^2 \langle \varrho(\epsilon_1, q_1) | \Theta_\lambda(0) | \varrho(\epsilon_2, q_2) \rangle \quad (\text{III.6.5})$$

in der Nähe des ϱ -Poles. Andererseits hat man

$$\langle \varrho(\epsilon_1, q_1) | \Theta_{\mu\nu}(0) | \varrho(\epsilon_2, q_2) \rangle = 2q_\mu q_\nu \epsilon_1^\lambda \epsilon_2^\lambda \left(-g_{\lambda\lambda} + \frac{q_\lambda q_\lambda}{m_\varrho^2} \right) \quad (\text{III.6.6})$$

Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\Delta(q^2) = -\frac{2}{f_\varrho^2} \left(\frac{m_\varrho^2}{m_\varrho^2 - q^2} \right)^2 \quad (\text{III.6.7})$$

Setzt man diesen Ausdruck nach $q^2 = 0$ fort, so folgt

$$R \approx \frac{12\pi}{f_s^2} \approx 4,7 \pm 0,7 \quad (\text{III.6.8})$$

Bisher wurde nur der Isovektoranteil betrachtet. Die Verallgemeinerung auf mehrere Vektormesonen lautet

$$R \approx 12\pi \sum \left| \sum \frac{1}{f_n} \right|^2 \quad (\text{III.6.9})$$

mit f_n der Kopplungskonstanten des n-ten Vektormesons.

Die innere Summe ist dabei über solche Vektormesonen zu nehmen, deren Beiträge sich kohärent addieren, die äußere Summe erfolgt über Klassen von Vektormesonen, deren Beiträge sich inkohärent addieren. Mit wachsender Masse m_n^2 wird allerdings die Extrapolation von $q^2 \approx m_n^2$ zu $q^2 = 0$ immer fragwürdiger.

Man kann (III.6.2) auch als Bestimmungsgleichung für $R(s)$ ansehen und daraus bei Kenntnis der Massen, Zerfallsbreiten und Kopplungskonstanten (mit relativen Phasen) die Energieabhängigkeit bestimmen.

Mit drei Beiträgen konnte so ein guter Fit bis $s = 25 \text{ GeV}^2$ erzielt werden [III.6.1].

Es besteht natürlich ein enger Zusammenhang zwischen diesem Bild und dem Partonmodell. Die Kopplung der Vektormesonen an das Photon erfolgt dort ja proportional zur Ladung ihrer Konstituenten. Wegen $\langle 0 | J_\mu^s(0) | \rho(e, q) \rangle = \frac{m_s^2}{f_s} \epsilon_\mu$ ist damit $\frac{1}{f_s^2} \propto e_i^2$ und es gilt also wieder $R = \sum_i e_i^2$.

IV. Lepton-Paarerzeugung in hadronischen Reaktionen

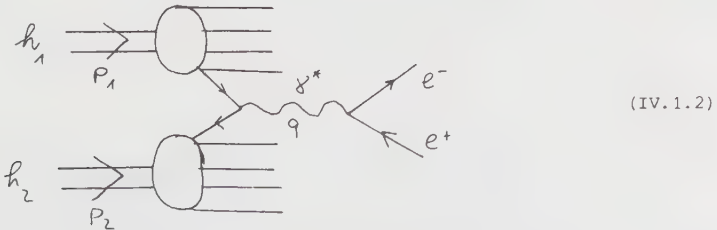
IV.1. Kinematik und hadronischer Tensor

Für tiefinelastische Reaktionen stellt das Partonmodell eine spezielle Darstellung der Lichtkegelentwicklung im Impulsraum dar, wie Jaffe und Polkinghorne gezeigt haben [IV.1.1]. Es gibt nun eine Reihe von Reaktionen, die man zwar im Rahmen eines (erweiterten) Partonmodelles beschreiben kann, für die aber die Lichtkegeldominanz verloren geht. Zu diesen Prozessen gehören Ein-Teilchen-inklusive Reaktionen in der Paarvernichtung $e^+e^- \rightarrow h_1 \bar{X}$ oder der tiefinelastischen Streuung $eN \rightarrow e' h_1 \bar{X}$ und die hier beschriebene Lepton-Paarerzeugung in hadronischen Reaktionen $h_1 h_2 \rightarrow e^+ e^- \bar{X}$. Der zuletzt genannte Prozeß hat den Vorteil, keine zusätzlichen Annahmen für das Partonmodell zu benötigen.

Nach Drell und Yan [IV.1.2] geschieht der Prozeß durch Bildung eines virtuellen Photons, das das Leptonpaar erzeugt.

$$h_1 h_2 \longrightarrow \gamma^* \bar{X} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \rightarrow e^+ e^- \end{array} \quad (\text{IV.1.1})$$

oder graphisch



P_1 = Impuls des ersten Hadrons

$\sqrt{(P_1 + P_2)^2} = \sqrt{s}$ = Schwerpunktsenergie

P_2 = Impuls des zweiten Hadrons

$\sqrt{q^2} = \sqrt{m_{\ell\ell}^2}$ = Masse des Leptonpaares bzw. des virtuellen Photons

Der hadronische Tensor hat die Form

$$\begin{aligned} \overline{W}_{\mu\nu}(p_1, p_2, q) &= \frac{1}{4\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q - p_X) \langle p_1 p_2 | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | p_1 p_2 \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle p_1 p_2 | J_\mu(y) J_\nu(0) | p_1 p_2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.1.3})$$

IV.2. Partonmodell [IV.2.1]

Der Vorgang wird im Schwerpunktsystem betrachtet und Massen werden dabei vernachlässigt

$$\begin{aligned} p_1 &\simeq (p, 0, 0, p) \\ p_2 &\simeq (p, 0, 0, -p) \\ q &= (q_0, q_\perp, x p) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.1})$$

Im Limes

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \infty \\ \tau &\equiv \frac{q^2}{(p_1 + p_2)^2} = \frac{m_{\ell\ell}^2}{s} \simeq \frac{q^2}{4p^2} = \text{konstant} \end{aligned} \quad (\text{IV.2.2})$$

erhält man

$$\begin{aligned} q_0 &= \sqrt{(4\tau + x^2)p^2 + q_\perp^2} = O(p) \rightarrow \infty \\ q_3 &= x p = O(p) \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{IV.2.3})$$

Die in (IV.2.2) eingeführte Größe τ stellt (im Schwerpunktsystem) den Bruchteil der Gesamtenergie dar, der im Leptonensystem steckt. In Analogie zur Schlußweise in Abschnitt II.2 und III.1 erwartet man, daß der dominante Beitrag zu $\overline{W}_{\mu\nu}$ (IV.1.3) wegen des Faktors $\exp[iqy]$ von einem Gebiet

$$y_0 \pm y_3 = O\left(\frac{1}{\beta}\right) \rightarrow 0 \quad (\text{IV.2.3})$$

herrühren wird. Als charakteristische Zeitdauer für die Wechselwirkung wird also $y_0 = O\left(\frac{1}{\beta}\right) \rightarrow 0$ auftreten, so daß für hohes P die Impulsapproximation gültig sein wird. Wie in II.2 und III.2 definiert man wieder folgende Größen

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \\ u(t) &= T \left(\exp \left[-i \int_{-\infty}^t \mathcal{H}_I(\tau) d\tau \right] \right) \\ |u p_i\rangle &= \sum_n \alpha_n |n\rangle \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.4})$$

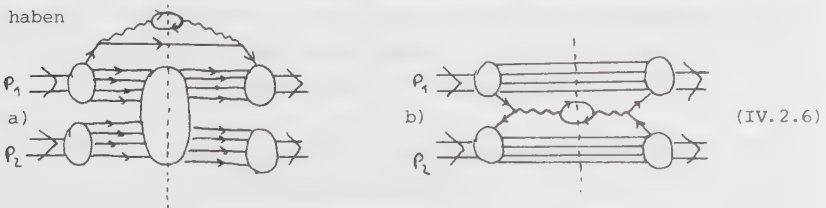
$$u(t) j_\mu(y) u^{-1}(t) = j_\mu(y)$$

Dabei wurde der Einfachheit halber $h_1 = h_2$ gesetzt. Es folgt dann

$$\overline{W}_{\mu\nu}(p_1, p_2, q) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n} |a_m|^2 |a_n|^2 \int dy e^{iqy} \langle n, m | j_\mu(y) j_\nu(0) | n, m \rangle \quad (\text{IV.2.5})$$

Nichtdiagonale Terme wurden wie unter (II.2.17) vernachlässigt.

(IV.2.5) enthält zwei Beiträge, die graphisch folgende Gestalt haben



Dabei sollte (IV.2.6a) jedoch stark unterdrückt sein, da die Partonen ja auf ihren Massenschalen liegen und deshalb keine Photonen mit $q^2 > 0$ abstrahlen können.

Um den Wirkungsquerschnitt gemäß (IV.2.6b) berechnen zu können, muß derjenige für eine Parton-Paarvernichtung

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow \gamma^* \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} e^2 \quad (\text{IV.2.7})$$

noch mit den Verteilungsfunktionen der Partonen in den Hadronen gefaltet werden.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} p_1 &= (x_1 p, p_{1z}, x_1 p) \\ p_2 &= (x_2 p, p_{1z}, -x_2 p) \\ S &= (p_1 + p_2)^2 \\ \bar{t} &= \frac{q^2}{S} = \frac{m_e^2}{S} \approx x_1 x_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.8})$$

erhält man

$$\frac{\alpha\bar{\sigma}}{\alpha m^2}(p_1 p_2 \rightarrow e^+ e^- \bar{\chi}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3N_c m^4} \int dx_1 dx_2 \delta(\bar{t} - x_1 x_2) \sum_i \left[(e_i^2) \right. \\ \left. (N_i(x_1) \bar{N}_i(x_2) + \bar{N}_i(x_1) N_i(x_2)) \right] \quad (\text{IV.2.9})$$

Bemerkungen

Die Partonverteilungsfunktionen N_i und $\bar{N}_i$ können den tiefinelastischen Streuexperimenten entnommen werden und ermöglichen eine eindeutige Vorhersage des Wirkungsquerschnitts.

Der Faktor N_c steht für die Anzahl der Colorfreiheitsgrade. Bis heute wurden nur Color-Singlett-Zustände beobachtet. Die Partonverteilungsfunktionen $N_i(x)$ stellen eigentlich eine

Summe von solchen Funktionen bezüglich Color dar.

$$N_i(x) = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} N_i^c(x) \quad (\text{IV.2.10})$$

Das Leptonpaar ist nun ein Colorsinglett und deshalb trägt nur die Größe

$$\frac{1}{N_c} N_i(x_1) \bar{N}_i(x_2) = \sum_{c_1, c_2} \delta^{c_1, c_2} \left(\frac{1}{N_c} N_i^{c_1}(x) \right) \left(\frac{1}{N_c} \bar{N}_i^{c_2}(x) \right) \quad (\text{IV.2.11})$$

etwas zum Prozeß bei. Das erklärt den Faktor $\frac{1}{N_c}$ in (IV.2.9).

IV.3. Lichtkegelanalyse

Der zu untersuchende Tensor hat die Form

$$\bar{W}_\mu^*(p_1, p_2, q) = \frac{1}{4\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle p_1, p_2 | J_\mu(y) J^\mu(0) | p_1, p_2 \rangle \quad (\text{IV.3.1})$$

Das Produkt der Ströme läßt sich wieder in bilokale Operatoren $B_i(y, 0)$ zerlegen

$$J_\mu(y) J^\mu(0) \underset{y^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_i C_i(y^2) B^i(y, 0) \quad (\text{IV.3.2})$$

Für die Matrixelemente dieser Operatoren hat man

$$\langle p_1, p_2 | B_i(y, 0) | p_1, p_2 \rangle = \hat{B}_i(y, p_1, y, p_2 | p_1, p_2, y^2) \quad (\text{IV.3.3})$$

Soweit es die Lichtkegelentwicklung betrifft, ist nun aber die Abhängigkeit der $\hat{B}_i(y, p_1, y, p_2 | p_1, p_2, y^2)$ von (p_1, p_2) unbekannt und willkürlich. Dasselbe gilt somit auch von der Abhängigkeit der Fourier-Transformierten $\tilde{B}_i$ von s

$$\tilde{B}_i(x_1, x_2, s = (p_1 + p_2)^2, q^2) \quad (\text{IV.3.4})$$

Es lassen sich deshalb keine Aussagen über den Limes $s, q^2 \rightarrow \infty$ mit $\bar{z} = \frac{s^2}{s}$ = konstant machen. Der wesentliche Unterschied zu

tiefeinelastischen Streuungen bzw. $e^+e^- \rightarrow h$ liegt darin, daß hier
 die Operatoren nicht zwischen festgehaltenen Zuständen betrachtet
 werden. Ein Vergleich mit dem Partonmodell zeigt, daß der Prozeß
 durch den sogenannten "cat's ear" Term  der Operator-
 produktentwicklung beschrieben wird und nicht durch den in der üblichen
 Lichtkegelentwicklung führenden "handbag" Graphen  .
 Der Drell-Yan Prozeß wird deshalb nicht durch den Lichtkegel
 dominiert.

V. Experimentelle Auswertung

Die folgende experimentelle Auswertung soll im wesentlichen im Rahmen des Partonmodells II.2 erfolgen. Für tiefinelastische Reaktionen stellt es eine spezielle Realisierung der Lichtkegelentwicklung im Impulsraum dar und wird deshalb dieselben Resultate liefern. Das gleiche gilt auch für die Untersuchungsmethode mit Hilfe des Bjorken-Johnson-Low-Limes, da dort die Vertauschungsrelationen mit Hilfe von Konstituentenmodellen für die Ströme abgeleitet wurden. Das Partonmodell besitzt den Vorzug der Anschaulichkeit, da man die Ergebnisse in Termen von Quantenzahlen wie Hyperladung, Isospin etc. diskutieren kann und nicht auf abstrakte Größen wie die f- und d-Strukturkonstanten von unitären Gruppen zurückgreifen muß.

V.1. Spin der Partonen

Eine Aussage über den Spin der Partonen liefert das Verhältnis von longitudinalem zu transversalem Wirkungsquerschnitt (II.2.32)

$$R(x, Q^2) = \frac{\sigma_L(x, Q^2)}{\sigma_T(x, Q^2)} = \frac{F_L(x, Q^2)}{2x F_T(x, Q^2)} + O\left(\frac{1}{Q^2}\right) \quad (V.1.1)$$

So gilt im naiven Partonmodell, daß (II.2.34)

$$R(x, Q^2) \xrightarrow[\text{Limes}]{\text{Bj.}} \begin{cases} \infty & \text{für Spin } 0 \\ 0 & \text{für Spin } \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Partonen} \quad (V.1.2)$$

Die Berücksichtigung von endlichen Transversalimpulsen modifiziert dieses Ergebnis zu (II.2.36)

$$R(x, Q^2) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{Q^2}{2 \langle p_T^2 \rangle} & S=0 \\ 4 \frac{\langle p_T^2 \rangle}{Q^2} & S=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (V.1.3)$$

A) Elektroproduktion

Die ersten Messungen der Größe R haben einen relativ kleinen Wert von $R \approx .18$ ergeben. Neuere Untersuchungen haben etwas größere Werte für R ermittelt

$$\begin{array}{ll}
 R = .25 \pm .10 & [V.1.1] \\
 R = .44 \pm .25 & [V.1.2] \\
 R = .52 \pm .35 & [V.1.3]
 \end{array} \quad (V.1.4)$$

Außerdem konnte keine eindeutige Abhängigkeit von R von x, oder Q^2 festgestellt werden [Figur 1]. So ergab

$$R(x, Q^2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{konst.} \\ R_0 \frac{1-x}{Q^2} \\ R'_0 \frac{1-x}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \end{array} \right\} \quad (V.1.5)$$

etwa gleich gute Fits [V.1.3]. Die $1/Q^2$ Abhängigkeit erwartet man dabei für Spin-1/2 Konstituenten mit endlichem Transversalimpuls (V.1.3), während die logarithmische Abhängigkeit für $s = 1/2$ im Rahmen asymptotisch freier Theorien gelten sollte (wegen (II.6.15) und $\bar{\alpha}(Q^2) \propto \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}$).

Die relativ kleinen Werte von R (V.1.4) weisen darauf hin, daß die Partonen hauptsächlich Spin-1/2 besitzen. Unter der Annahme, daß ausschließlich Spin-1/2 vorkommt, wird man den endlichen Wert von R durch Bindungseffekte, endliche Transversalimpulse, Wechselwirkung der Partonen untereinander etc. zu erklären versuchen. Es kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, daß ein gewisser Anteil von Spin-0 Partonen vorhanden ist. In diesem Fall wäre der asymptotische Wert von R gegeben durch

$$R(x, Q^2) \longrightarrow \frac{\sum e_i^2 N_i^{s=0}(x)}{\sum e_i^2 N_i^{s=1/2}(x)} \quad (V.1.6)$$

Spin-1 Partonen führen zu Skalenverletzung bei den Strukturfunktionen durch Terme der Art Q^2/m^2 (siehe II.2). Ein solches Verhalten wurde nicht beobachtet. Durch Einführung zusätzlicher Teilchen und Kopplungen läßt sich dieses Problem zwar beheben [V.1.4], doch erscheint dieses Vorgehen einwenig künstlich. Ein gewisser Beitrag an Spin-1 Partonen kann allerdings nicht ausgeschlossen werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Daten mit der Annahme verträglich sind, daß alle Partonen Spin 1/2 besitzen. Es kann dabei allerdings nicht ausgeschlossen werden, daß auch Partonen mit anderem Spin vorkommen.

Bemerkungen

Der Wert von R wird aus

$$\frac{\alpha^2 \epsilon}{\alpha x \alpha y} = \frac{8\pi \alpha^2 n E}{Q^4} \bar{F}_2(x, Q^2) \left[1 - y + \frac{Q^2 + 2(1 - R(x, Q^2)) x^2 n^2}{2(1 + R(x, Q^2)) Q^2} y^2 \right] \quad (V.1.7)$$

durch Variation von y ermittelt. Bei festgehaltenem x und $Q^2 = 2nExy$ bedeutet das, daß Messungen mit verschiedenen Strahlenergien E vorgenommen werden müssen. Das kann zu Kalibrationsschwierigkeiten führen. Für kleine Werte von R hängt (V.1.7) außerdem nur sehr schwach von R ab. Das erklärt die großen Fehlergrenzen der Meßergebnisse.

Unter der Annahme, daß alle Partonen Spin 1/2 tragen, verschwindet R in niedrigster Näherung. Für einen Vergleich mit dem Experiment muß man deshalb Korrekturen höherer Ordnung heranziehen, die nicht so genau bekannt sind. Im Rahmen der Lichtkegelentwicklung tragen beispielsweise Operatoren mit Twist $\tau > 2$ bei. Die Größe der entsprechenden Matricelemente ist praktisch unbekannt. Aus diesem Grund stellt auch die Diskrepanz zwischen heutigen Berechnungen von R im Rahmen der QCD und dem Experiment kein starkes Argument gegen die Gültigkeit der QCD dar.

B) Schwache Wechselwirkung

Im Rahmen der schwachen Wechselwirkung lassen sich eindeutige Aussagen machen. Die neuesten Daten des CDHS Experiments [V.1.5] ergeben

$$\frac{\int F_3(x) \alpha x}{\int 2x F_1(x) \alpha x} < 0.05 \quad (V.1.8)$$

und sind gut verträglich mit der Annahme, daß $F_3 \equiv 0$ gilt. Die schwache Wechselwirkung erfolgt somit (fast ausschließlich) an Spin-1/2 Partonen.

Bemerkungen

Spin-0 Partonen lassen keine Paritätsverletzung zu. Experimentell wurde aber Paritätsverletzung gefunden.

Für Spin 1 läßt sich zwar ein Axialvektor angeben, doch kann man ihn nicht aus einer Nötherkonstruktion ableiten.

C) Reaktionen mit zeitartigem Impulsübertrag ($q^2 > 0$)

Hinweise auf den Spin der Partonen für $q^2 > 0$ sind etwas indirekter Art. Für die Paarvernichtung $e^+e^- \rightarrow h$ (Kapitel III.) liefern Spin-0 Partonen einen um den Faktor 4 kleineren Wert als Spin-1/2 Partonen. Mit den Ladungszuordnungen, die man aus den tiefinelastischen Reaktionen erhalten hat, liefern Spin-0 Partonen somit einen viel zu kleinen Wert.

Spin-1 Partonen führen in ihrer einfachsten Form wieder zu Skalenverletzungen, die nicht beobachtet wurden. Sie sollen deshalb außer acht gelassen werden.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Untersuchung der Winkelverteilung von Hadronen in 1-Teilchen-inklusive Reaktionen wie $e^+e^- \rightarrow h \bar{X}$. Dazu muß die starke Annahme gemacht werden, daß wenigstens diejenigen Hadronen, die den größten Energiebruchteil der Gesamtenergie tragen, die Richtung des ursprünglich produzierten Parton-Paares beibehalten und so deren Winkelverteilung widerspiegeln (es lassen sich Modelle angeben, in denen das nicht der Fall ist).

Bei Verwendung unpolarisierter Elektronen und Positronen gilt

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \sigma_T + \sigma_L + (\sigma_T - \sigma_L) \cos^2(\theta) \quad R = \sigma_L/\sigma_T \quad (\text{V.1.9})$$

und $R \rightarrow 0$ bedeutet wieder Spin-1/2 Partonen. Experimente bei der Schwerpunktenergie $\sqrt{s} = 7.4 \text{ GeV}$ haben eine Winkelabhängigkeit gezeigt, die auf $\sigma_T > \sigma_L$ schließen läßt [V.1.6]. Der Effekt ist allerdings nicht sehr groß. Außerdem erhält man dieselbe Winkelverteilung wie mit Spin-1/2 Partonen auch für den Fall, daß der Prozeß dominant durch

$$e^+e^- \longrightarrow \pi M \quad (V.1.10)$$

gegeben ist mit einem Meson oder Mesonsystem M natürlicher Parität
 $P_M = (-)^J^M (P, A_2, \text{etc})$ [V.1.7].

Die Situation verbessert sich bei Verwendung polarisierter Strahlen.
 Sind P_+ und P_- die entsprechenden Polarisationsgrade, so gilt

$$\frac{d\sigma^e}{d\Omega} = \sigma_T + \sigma_L + (\sigma_T - \sigma_L) \cos^2(\theta) + P_+ P_- (\sigma_T - \sigma_L) \sin^2(\theta) \cos(2\phi) \quad (V.1.11)$$

und für $\sqrt{s} = 7.4 \text{ GeV}$ wurde $\sigma_L \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 1$ (d.h. ein Teilchen trägt die maximal mögliche Energie) gefunden.

D) Spektroskopie

Will man die Quarks, also die Konstituenten der Hadronen, die man aus der Spektroskopie abgeleitet hat, mit den Partonen aus der tiefinelastischen Streuung identifizieren, so führt das auf Spin-1/2. Doch müssen diese beiden Arten von "Bausteinen" nicht zwangsläufig etwas miteinander zu tun haben.

Zusammenfassend kann man sagen, daß alle experimentellen Befunde mit der Annahme verträglich sind, daß Partonen ausschließlich Spin 1/2 besitzen. Das soll im folgenden auch angenommen werden, obwohl die Existenz von Partonen mit anderem Spin nicht ganz ausgeschlossen werden kann.

Beachte: Die Vektorgluonen, deren Existenz die QCD fordert, besitzen zwar Spin 1, doch sollen sie weder Isospin noch elektromagnetische Ladung tragen. Sie nehmen deshalb am Streuprozess nicht direkt teil.

V.2. Schwacher geladener Strom und Partonverteilung

a) Ladungssymmetrie

Die Wirkungsquerschnitte für Neutrino- und Antineutrino-Streuung erfüllen nach (II.1.18) folgende Relation

$$\left(\frac{\alpha \sigma^{\nu}}{\alpha_y} - \frac{\alpha \sigma^{\bar{\nu}}}{\alpha_y} \right)_{y=0} = \frac{G^2 R E}{\pi} \left(\frac{m_w^2}{m_w^2 + Q^2} \right)^2 \int dx \left[F_2^{\nu}(x, Q^2) - F_2^{\bar{\nu}}(x, Q^2) \right] \quad (V.2.1)$$

Die CVC Hypothese, nach der der Vektoranteil der geladenen schwachen Ströme und der Isovektoranteil des elektromagnetischen Stromes Komponenten ein und desselben Isovektors sind, zusammen mit der Annahme, daß das Nukleonsystem in guter Näherung ein Isodublett bezüglich desselben Isospins ist, führen als eine der Konsequenzen auf die sogenannte Ladungssymmetrie $F_2^{\nu p}(x, Q^2) = F_2^{\bar{\nu} n}(x, Q^2)$ etc. (II.1.14).

Gilt diese Relation, so sind die Strukturfunktionen für Neutrino- und Antineutrino-Streuung an einem isoskalaren Target gleich

$$F_2^{\nu, I=0}(x, Q^2) = F_2^{\bar{\nu}, I=0}(x, Q^2) \quad (V.2.2)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung läßt sich also durch

$$\left(\frac{\alpha \sigma^{\nu, I=0}}{\alpha_y} - \frac{\alpha \sigma^{\bar{\nu}, I=0}}{\alpha_y} \right)_{y=0} = 0 \quad (V.2.3)$$

testen. Verletzungen dieser Relation, wie sie von der HPWF Collaboration [V.2.1] [Figur 2] berichtet wurden, konnten durch neuere Experimente nicht bestätigt werden. So ergaben beispielsweise die mit hoher Statistik durchgeführten Experimente der CDHS Collaboration [V.2.2] [Figur 3] bei Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen einen Wert von

$$\left[\frac{(\alpha \sigma^{\bar{\nu}} / \alpha_y)}{(\alpha \sigma^{\nu} / \alpha_y)} \right]_{y=0} = 1.01 \pm 0.07 \quad (V.2.4)$$

Durch dieses Ergebnis wird also die Gültigkeit der CVC Hypothese, die mit gutem Erfolg in der Kernphysik getestet wurde [V.2.3], auch für die mit heutigen Beschleunigern erreichbaren Neutrino-energien (bis zu ca. 200 GeV) bestätigt. Man kann damit die Formeln (II.2.28) für die Strukturfunktionen verwenden, die unter Zuhilfenahme der Ladungssymmetrie (II.1.14) abgeleitet wurden.

B) Lorentz-Struktur des schwachen Stromes

Eine Aussage über die Lorentzstruktur des schwachen, geladenen Stromes erhält man aus $F_L(x)$ und $F_R(x)$ (siehe Tabelle 2). Reine V-A Kopplung der Partonen liefert $\bar{F}_R = 0$, reine V+A Kopplung dagegen $\bar{F}_L = 0$. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int F_L(x) dx \\ \langle R \rangle &= \int F_R(x) dx \\ \eta &= \frac{\langle R \rangle}{\langle L \rangle + \langle R \rangle} \end{aligned} \quad (\text{V.2.5})$$

läßt sich für die Streuung an einem isoskalaren Target schreiben

$$r = \frac{\sigma_{\bar{\nu}}}{\sigma_{\nu}} = \frac{3\langle R \rangle + \langle L \rangle}{\langle R \rangle + 3\langle L \rangle} = \frac{1+2\eta}{3-2\eta} \quad (\text{V.2.6})$$

η gibt dabei den (mit dem Isospin gewichteten) Impulsanteil der effektiv rechtshändig koppelnden Partonen am Gesamtimpuls an. Das Verhältnis r bewegt sich somit in den Grenzen

$$3 \geq r \geq \frac{1}{3} \quad (\text{V.2.7})$$

wobei der oberen Grenze $\eta = 1$ und der unteren $\eta = 0$ entspricht. Experimentell hat man

$$r \approx .38 - .49 \quad [\text{V.2.4}] \quad (\text{V.2.8})$$

was zu einem η von $\eta \approx 10 - 20 \%$ führt. Der dominante Impulsanteil wird somit von linkshändig koppelnden Partonen getragen.

Die Abweichung von $r = 1/3$ läßt sich entweder als Verletzung der V-A Kopplung oder als Auftreten von Antipartonen im Hadron interpretieren. Man wählt die zweite Erklärungsmöglichkeit (siehe auch C) und setzt damit $I_R \equiv 0$.

Zusatz: Nach dem sogenannten "confusion theorem" [V.2.5] läßt sich jede Winkelverteilung der Wirkungsquerschnitte, die durch eine Kombination von V und A Kopplung erreichbar ist, auch durch eine entsprechende Kombination von S, P und T (Skalar, Pseudoskalar und Tensor) erhalten. Neuere Experimente, bei denen die Polarisierung der μ in $\nu N \rightarrow \mu \bar{X}$ gemessen wurde, setzen jedoch eine Grenze von $< 18\%$ für einen SPT Anteil [V.2.6]. Damit ist die Verwendung von V und A Kopplungen bestätigt worden.

C) Parton-/Antiparton-Verteilung

Eine genauere Analyse der Daten zeigt, daß F_R auf kleine Werte von x beschränkt ist und für $x \rightarrow 0$ sogar $F_R(x) \simeq F_L(x)$ gilt [Figur 4]. Aus Experimenten bei niedrigen Energien weiß man, daß die schwache Wechselwirkung eine V-A Struktur besitzt. Änderungen dieser Struktur, wie sie in vektorartigen Theorien [V.2.7] erwartet wird (für höhere Energien kommt ein V+A Anteil hinzu, so daß man schließlich reine Vektorkopplung erhält), sollten bei hohen Werten von Q^2 , und damit zuerst bei großem x , auftreten. Für $x \rightarrow 1$ gilt jedoch $F_R(x) \rightarrow 0$.

Eine Änderung der V-A Struktur für kleine x ist bei Anregung neuer, schwerer Freiheitsgrade zu erwarten (die Masse des hadronischen Endzustandes $\bar{X}$ ist durch $M_{\bar{X}}^2 = M^2 + 2ME_y(1-x)$ gegeben), falls diese eine andere Kopplung an die W-Bosonen besitzen. In diesem Fall müßten jedoch eine entsprechende Anzahl neuer Teilchen im Endzustand auftreten, die entsprechend geänderte Zerfallscharakteristiken aufweisen. Dies wurde (bis heute) nicht beobachtet.

Man hält somit an der V-A Struktur der schwachen, geladenen Ströme fest und führt $F_R \neq 0$ auf das Vorhandensein von Antipartonen im Hadron zurück. Das Auftreten von Antipartonen im Hadron wird übrigens auch zur Erklärung des Drell-Yan Prozesses (Kapitel IV) erfordert.

Aus der Tatsache, daß für $x \rightarrow 0$ $F_R(x) \approx F_L(x)$ (Figur 4) und $F_2^{ep}(x) \approx F_2^{en}(x)$ [Figur 5] gilt, schließt man, daß in dieser kinematischen Region eine isoskalare Verteilung von Parton-Antiparton-Paaren vorherrscht. Man nennt diese Paare auch "see". Für $x \rightarrow 1$ sollten dagegen jene Partonen vorherrschen, aus denen man sich das Hadron im Rahmen der SU(N) Klassifizierung der Spektroskopie aufgebaut denkt. Man spricht dabei von "Valenzquarks".

Die Gleichheit von Proton- und Neutronstrukturfunktionen für $x \rightarrow 0$ wird im Rahmen der Regge-Theorie dadurch "erklärt", daß die diffraktive Streuung durch den Austausch eines isoskalaren Teilchens, des Pommerons, dominiert wird.

Es sollte vielleicht nochmals darauf hingewiesen werden, daß alle Aussagen über die Partonverteilungen natürlich nur für Partonen mit nichtverschwindendem (schwachen) Isospin gelten können.

V.3. Ladung (Hyperladung) der Partonen

A) Tiefinelastische Streuung

Aufgrund der Formel (II.2.24)

$$e_i = \frac{1}{2} Y_L^i + \frac{1}{2} I_{3L}^i = \frac{1}{2} Y_R^i + \frac{1}{2} I_{3R}^i \quad (\text{V.3.1})$$

läßt sich die Bestimmung der Ladungen der Partonen auf diejenige ihrer (schwachen) Hyperladung zurückführen. Bei deren Bestimmung aus den experimentell ermittelten Strukturfunktionen muß man zunächst die Verteilungsfunktionen $N_i(x)$ der Partonen eliminieren, da diese (bis heute) theoretisch nicht ableitbar sind. Dies geschieht entweder mit Hilfe der Normierungsbedingungen (II.2.29) bei integralen Summenregeln, oder durch Ausnutzung von Relationen zwischen den Strukturfunktionen selbst. Da der Wert der Summenregeln im allgemeinen durch die Wechselwirkung der Partonen untereinander modifiziert werden kann (siehe (II.6.12) bis (II.6.14)), ist die zweite Methode vorzuziehen, da man bei ihrer Anwendung nur anzunehmen hat, daß die Verteilungsfunktionen $N_i(x)$ (besser $N_i(x, Q^2)$) nur von der kinematischen Region abhängen, in der sie ermittelt werden und nicht auch vom speziellen Prozeß (elektromagnetisch oder schwach), mit dem dies geschieht. Dazu würden sich die Relationen (II.2.39), (II.2.40) und (II.2.37) eignen

$$\frac{F_1^{ep}(x) - F_1^{en}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} = \frac{1}{2x} \frac{F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)}{F_3^{vp}(x) - F_3^{vn}(x)} \quad (\text{V.3.2a})$$

$$= \frac{1}{4} Y_L^i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} G \pi^2 \\ \frac{1}{4} \text{ Sakata} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ \text{alle } Y_L^i \text{ sind gleich} \end{array} \right\}$$

$$\frac{F_1^{ep}(x) - F_1^{en}(x)}{F_1^{vp}(x) - F_1^{vn}(x)} = \frac{F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)}{F_2^{vp}(x) - F_2^{vn}(x)} \quad (\text{V.3.2b})$$

$$= -\frac{1}{2} Y_L^i = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} G \pi^2 \\ -\frac{1}{2} \text{ Sakata} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} I_R^i = 0 \\ \text{alle } Y_L^i \text{ sind gleich} \\ \text{isotabares } \bar{N}_i \end{array} \right\}$$

$$\frac{F_1^{ep}(x) + F_1^{en}(x)}{F_1^{vp}(x) + F_1^{vn}(x)} = \frac{F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)}{F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)} \quad (V.3.2c)$$

$$= \frac{1}{4} [1 + (\gamma_L^i)^2] = \begin{cases} 5/18 & \text{G\ddot{u}nz} \\ 1 & \text{Sakata} \end{cases} \text{ falls } \begin{cases} \gamma_L^i = \frac{1}{2} \\ \gamma_L^i = 0 \\ \text{alle } \gamma_L^i \text{ sind gleich} \end{cases}$$

Leider lassen sich (V.3.2a) und (V.3.2b) nicht überprüfen, da für Neutrinostreuungen keine ausreichenden Daten für Proton- und Neutron-Strukturfunktionen getrennt existieren. (V.3.2b) kann mit Hilfe der Adler-Summenregel in eine integrale Form umgeschrieben werden (siehe (II.2.41))

$$\int \frac{dx}{x} [F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)] \approx \gamma_L^i = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{G\ddot{u}nz} \\ 1 & \text{Sakata} \end{cases} \quad (V.3.3)$$

Experimentell hat man [V.3.1]

$$\int \frac{dx}{x} [F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)] \approx \begin{cases} 0.20 \pm 0.04 \\ 0.28 \pm ? \text{ bei Regge Fit f\ddot{u}r } x \rightarrow 0 \end{cases} \quad (V.3.4)$$

was sehr stark auf drittelzahlige Hyperladungen $\gamma_L^i = \frac{1}{3}$ und damit $e_i = 2/3$ und $-1/3$ hinweist.

Die Daten für (V.3.2c) sind sowohl für individuelle x [Figur 6], als auch in der über x integrierten Form [Figur 7] sehr gut mit $5/18$ verträglich, was auf $\gamma_L^i = \frac{1}{3}$ und verschwindenden Anteil an Isospin $\neq 1/2$ schließen läßt.

Close hat gezeigt, wie man mit weniger detaillierten Annahmen über die Wechselwirkungen den Wert $5/18$ erhalten kann. Die Strukturfunktionen für die elektromagnetische Streuung an einem isoskalaren Target setzen sich aus einem Isoskalar- und einem Isovektoranteil zusammen.

$$F_2^{en}(x) = F_2^{\bar{I}=0}(x) + F_2^{\bar{I}=1}(x) \quad (V.3.5)$$

Nimmt man an, daß der Vektor-Vektor- und der Axialvektor-Axialvektor-Beitrag der schwachen Wechselwirkung gleich groß (gültig für freie Spin-1/2 Konstituenten) und durch die CVC Hypothese mit dem Isektoranteil der elektromagnetischen Wechselwirkung verknüpft sind, so folgt

$$F_2^{VN}(x) = 2 \left(F_2^{VN}(x) \right)_{VV} \stackrel{\text{Isospin Rotation}}{=} 4 F_2^{I=1}(x) \quad (\text{V.3.6})$$

Für das Verhältnis der Strukturfunktionen bedeutet das

$$\frac{F_2^{EN}(x)}{F_2^{VN}(x)} = \frac{1}{4} + \frac{F_2^{I=0}(x)}{F_2^{I=1}(x)} \quad (\text{V.3.7})$$

Beträgt der Isoskalaranteil ca. 10% des Isektoranteils, also

$$F_2^{I=0}(x) \simeq \frac{1}{10} F_2^{I=1}(x) \quad (\text{V.3.8})$$

so erhält man für (V.3.7) den Wert von $\simeq 5/18$, Man braucht somit einen Mechanismus, der eine Unterdrückung des Isoskalarbeitrags bewirkt. Im obigen Fall geschieht dies durch den gebrochenen Wert für die Hyperladung $Y = 1/3$, da damit $F_2^{I=0}(x)/F_2^{I=1}(x) = \frac{1}{4} \frac{Y^2}{I_3^2} = Y = \frac{1}{9}$ und die gewünschte Unterdrückung erzielt wird.

Unterdrückung des Isoskalaranteils

Eine Möglichkeit, den Effekt mit ganzzahligem Y zu erreichen, besteht in der Einbeziehung von Partonen mit $I > \frac{1}{2}$. Kühnelt und Nachtmann [V.3.2] haben diese Frage untersucht und ein Modell angegeben, das bezüglich der starken SU(3) Singlett-, Oktett- und Dezimettpartonen enthält. Es kann in etwa die Daten aus der schwachen und elektromagnetischen Streuung wiedergeben und liefert auch den richtigen Wert für $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Dagegen erhält man $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{u}u)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 2.2$, einen Wert, der viel zu groß ist ($R \simeq 5$ experimentell). Die Hinzunahme von $I > \frac{1}{2}$ scheint keine brauchbare Lösung zu sein.

Der isoskalare Beitrag läßt sich auch dadurch unterdrücken, daß geeignete Symmetrieeigenschaften für die Quantenzahlen der (bei heutigen Energien vorkommenden) Hadronen gefordert werden. Man kann so erreichen, daß nur ein Teil des vollen elektromagnetischen Stromes an das Photon ankoppelt. Das führt zu effektiven Ladungen, die sich aus einem Mittelungsprozeß ergeben. Dieser Effekt tritt im Rahmen des Han-Nambu Modells oder entsprechenden Verallgemeinerungen auf (siehe Anhang A1). Man nimmt dazu an, daß alle (bis heute beobachteten) Teilchen Singletts bezüglich der inneren SU(3) Colorgruppe sind. Teilchen mit nichttrivialen Coloreigenschaften sollen viel größere Massen besitzen. Unterhalb der "Colorschwelle" (Energieschwelle für Anregung von Colorfreiheitsgraden) trägt nur der Singlettanteil des elektromagnetischen Stroms bei. Der Oktettanteil kann nicht angeregt werden. Für $SU(3_F) \times SU(3_C)$ hat man

$$\begin{aligned} J_\mu^e &= \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 + \bar{u}_2 \gamma_\mu u_2 - \bar{\alpha}_3 \gamma_\mu \alpha_3 - \bar{s}_3 \gamma_\mu s_3 \\ &= J_\mu^e(1) + J_\mu^e(8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\mu^e(1) &= \frac{2}{3} [\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 + \bar{u}_2 \gamma_\mu u_2 + \bar{u}_3 \gamma_\mu u_3] - \frac{1}{3} [\bar{\alpha}_1 \gamma_\mu \alpha_1 + \bar{\alpha}_2 \gamma_\mu \alpha_2 + \bar{\alpha}_3 \gamma_\mu \alpha_3] \\ &\quad - \frac{1}{3} [\bar{s}_1 \gamma_\mu s_1 + \bar{s}_2 \gamma_\mu s_2 + \bar{s}_3 \gamma_\mu s_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\mu^e(8) &= \frac{1}{3} [\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 + \bar{\alpha}_1 \gamma_\mu \alpha_1 + \bar{s}_1 \gamma_\mu s_1] + \frac{1}{3} [\bar{u}_2 \gamma_\mu u_2 + \bar{\alpha}_2 \gamma_\mu \alpha_2 + \bar{s}_2 \gamma_\mu s_2] \\ &\quad - \frac{2}{3} [\bar{u}_3 \gamma_\mu u_3 + \bar{\alpha}_3 \gamma_\mu \alpha_3 + \bar{s}_3 \gamma_\mu s_3] \end{aligned}$$

Die Indizes 1, 2, 3 stehen für Color- und u, d, s für Flavor-freiheitsgrade. u_1 bedeutet ψ_{u_1} , etc.

Der Singlettanteil des Stromes, $\vec{J}_\mu^e(1)$, hat dieselbe Form wie der elektromagnetische Strom für Gell-Mann-Zweig-Quarks mit einer zusätzlichen inneren SU(3) (siehe Anhang A1). Die Unterdrückung des Coloroktettanteils des Stromes durch die physikalischen Endzustände hat also an Stelle der ganzzahligen Ladungen effektive drittelzahlige Ladungen bewirkt. Unterhalb der Colorschwelle sind Han-Nambu-artige Modelle nicht von Modellen mit Gell-Mann-Zweig-Quarks und einer Color-SU(3)_C zu unterscheiden.

Anmerkung zu Han-Nambu-artigen Modellen (HN)

Auch in Mehrphotonprozessen lassen sich HN-artige Modelle nicht von GMZ Modellen mit Color-SU(3) unterscheiden. Zwar würde man wegen $8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27$ auch einen Beitrag vom Oktettanteil für einen Übergang zwischen Singlettzuständen erwarten, doch ist dieser Beitrag wegen der hohen Massen der dabei auftretenden Oktettzwischenzustände stark unterdrückt, worauf Lipkin hingewiesen hat [V.3.3]. Das ist letztlich auch die Aussage eines Theorems von Appelquist und Carazzone [V.3.4], nach dem massive Freiheitsgrade unterhalb ihrer Schwellen effektiv entkoppelt sind.

Postuliert man, daß die starke Wechselwirkung durch den Austausch von Teilchen geschieht, die an die Colorladung koppeln (da Leptonen keinen Colorfreiheitsgrad besitzen, "erklärt" dies das Fehlen der starken Wechselwirkung für Leptonen), so sieht man, daß diese "Gluonen" in HN-artigen Modellen elektrische Ladung tragen müssen. Unterhalb der Colorschwelle erfolgt jedoch keine Kopplung des Photons an diese Gluonen, da ihre über den Colorfreiheitsgrad gemittelte Ladung 0 ist.

Eicht man den Colorfreiheitsgrad, so sind sowohl HN-artige Modelle [V.3.5], als auch GMZ-artige Modelle (QCD, [V.3.6]) als nichtabelsche Eichtheorien asymptotisch frei (Probleme mit Higgsfeldern werden hier ignoriert).

Zusammenfassend kann man sagen, daß beide Arten von Modellen gleich gut die Daten beschreiben können. Der Ausdruck "nicht ganzzahlige Quantenzahlen" bedeutet daher stets "effektive, nicht ganzzahlige Quantenzahlen".

Auch die Groß-Llewellyn-Smith-Summenregel gibt einen Hinweis auf gebrochene Ladungen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dx [F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x)] &= 2 \sum \left[I_L^i (I_L^i + 1) - (I_3^i)^2 + I_R^i (I_R^i + 1) - (I_3^i)^2 \right] \int dx [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] \\ &= \sum \int dx [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] \end{aligned} \quad (V.3.10)$$

Falls $I_R = 0$, $I_L = \frac{1}{2}$. Das Integral erhält größere Beiträge von $x \rightarrow 0$ und ist deshalb etwas schwer abzuschätzen [V.3.7], [Figur 8]

$$\text{Experiment} \quad \frac{1}{2} \int_{5 \cdot 10^{-3}}^1 dx [F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x)] = 2.7 \pm .3 \quad (V.3.11)$$

$$\text{Extrapolation} \quad \frac{1}{2} \int_0^1 dx [F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x)] = 3.2 \pm .5$$

Haben alle Partonen die gleiche (effektive) Hyperladung Y^i bzw. Baryonenzahl B_i , so läßt sich die Normierungsbedingung (II.2.29) umformen zu

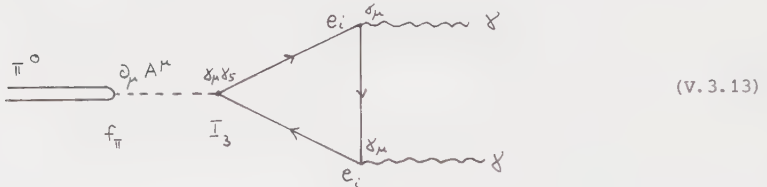
$$\sum \int dx [N_i(x) - \bar{N}_i(x)] = \frac{1}{Y^i} \text{ bzw. } \frac{1}{B_i} \quad (V.3.12)$$

Daraus folgt dann wieder Y^i bzw. $B_i = \frac{1}{3}$.

B) Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

Dieser Zerfall wird unter Verwendung der PCAC ("partially conserved vector current") Hypothese [V.3.8] mit Hilfe der Adler Anomalie [V.3.9] berechnet.

Graphisch



Die Stärke des Prozesses wird durch $S = \sum_i I_3^i (e_i)^2$ bestimmt (I_3 ist der starke Isospin) und wird experimentell mit Hilfe der inversen Zerfallskonstanten bestimmt [V.3.10],

$$\text{Theorie} \quad \tau^{-1} = S^2 \cdot 29.2 \text{ eV} \quad (\text{V.3.14})$$

$$\text{Experiment} \quad \tau^{-1} = 7.8 \pm 0.9 \text{ eV}$$

woraus mit guter Genauigkeit $S = \frac{1}{2}$ folgt. Hat man N Dubletts mit jeweils gleichen Ladungen e und $e-1$, so gilt

$$S = \frac{1}{2} = N \left[\frac{1}{2} (e^2 - (e-1)^2) \right] = \frac{1}{2} N (2e-1) \quad (\text{V.3.15})$$

$N = 1$ (kein Colorfreiheitsgrad) führt auf die Ladungen 1 und 0 des Sakata Modells. Wegen $Y = 1$ erhält man jedoch einen Widerspruch zu Abschnitt A).

$N = 3$ führt auf $e = \frac{2}{3}$ und $-\frac{1}{3}$, also die Quantenzahlen des Gell-Mann-Zweig-Modells. Aber auch Han-Nambu-Quarks führen auf den Wert von $S = \frac{1}{2}$! Es sollte vielleicht angemerkt werden, daß $N = 3$ nicht automatisch $SU(3)$ bedeutet.

C) Elektron-Positron-Vernichtung $e^+e^- \rightarrow h$ (siehe Kapitel III)

$$\text{Experimentell gilt für } R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow e)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad [\text{V.3.11}] \quad [\text{Figur 9}]$$

$$R \approx 2-2.5 \quad \text{für } \sqrt{s} = 2-4 \text{ GeV}$$

(V.3.16)

$$R \approx 4.5-5 \quad \text{für } \sqrt{s} \approx 5-10 \text{ GeV}$$

wobei $\sqrt{s}$ die Schwerpunktsenergie ist und die Beiträge des schweren Leptons τ abgezogen wurden. Die vorhandenen Daten weisen bei niedrigen Energien größere Streuungen auf und bei höheren Energien unterscheiden sich die Werte, die von verschiedenen Gruppen für R angegeben werden, um etwa eine Einheit.

Im Partonmodell mit $\text{Spin-}\frac{1}{2}$ Konstituenten gilt $R = \sum_i (e_i)^2$ (III.2.6). R soll hier für einige Modelle angegeben werden

	SU(3) Flavor	SU(4) Flavor
a) GMZ ohne Color	1/3	10/9
b) GMZ mit Color	2	3 1/3
c) HN unterhalb Colorschwelle	2	3 1/3
d) HN oberhalb Colorschwelle	4	6

(V.3.17)

b) und c) geben in etwa die experimentellen Werte wieder und man versucht, die Abweichungen von den experimentellen Daten durch die Restwechselwirkung der Partonen untereinander zu erklären (siehe z.B. (III.4.6)).

Renormierungsgruppenüberlegungen zeigen einem, daß nur für asymptotisch freie Theorien der Zusammenhang zwischen R und $\sum e_i^2$ erhalten bleibt (siehe (III.4.5) und (III.4.6)). In diesen Theorien gilt nämlich

$$R(q^2) \underset{q^2 \rightarrow -\infty}{\approx} \sum e_i^2 [1 + \alpha \bar{\alpha}_s(Q^2) + \dots] \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \sum e_i^2 \quad (\text{V.3.18})$$

während für endlichen Fixpunkt $\alpha_c \neq 0$ die Korrekturterme nicht verschwinden.

Bemerkungen

Verwendet man Dispersionsrelationen, um die für $q^2 > 0$ experimentell gemessenen Werte mit den störungstheoretisch für $q^2 < 0$ berechneten Werten zu vergleichen, so bleibt das durch naive Fortsetzung gewonnene Ergebnis bestehen, daß Modell b) und Modell c) brauchbare Beschreibungen der Daten liefern [V.3.12].

Eine andere Art des Vergleiches von Experiment und Theorie wurde von Sanda [V.3.13] unternommen. Er verwandte eine durch Borell-Summation gewonnene, verbesserte gleitende Kopplungskonstante $\alpha_s(Q^2)$, um die QCD Berechnung von $R(q^2)$ nach $q^2 > 0$ analytisch fortzusetzen. Sein Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} R &= 2.02 \pm 0.3 \quad \text{für SU(3) Flavor, also } u, d, s \text{ Partonen} \\ R &= 3.5 \pm 0.5 \quad \text{für SU(4) Flavor, also } u, d, s, c \text{ Partonen} \end{aligned} \quad (V.3.19)$$

was eine sehr gute Übereinstimmung mit Modell b) bzw. c) bedeutet. Andererseits ist jedoch klar, daß die relativ große Ungenauigkeit der heute bekannten experimentellen Daten und der eingeschränkte Energiebereich, für den man sie kennt, einen wirklichen Vergleich der Q^2 -Abhängigkeit von R zwischen Theorie und Experiment verhindert.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die experimentellen Daten sehr stark auf nicht ganzzahlige Quantenzahlen hinweisen. Dabei kann es sich um "echte" nicht ganzzahlige Quantenzahlen, wie im GMZ Modell, handeln, oder um effektive nicht ganzzahlige Quantenzahlen, wie sie im HN Modell unterhalb der Colorschwelle auftreten. In beiden Fällen benötigt man jedoch eine weitere innere Symmetrie, genannt Color.

V.4. Die Colorquantenzahl

A) Spektroskopie

Im Rahmen von Potentialmodellen für den Aufbau der Hadronen aus Konstituenten erwartet man, daß die leichtesten Hadronen durch Wellenfunktionen gegeben sind, die symmetrisch bezüglich der Orts- und Spinfreiheitsgrade sind. Im Gell-Mann-Zweig-Modell, nach dem die Baryonen aus drei sogenannten Quarks aufgebaut sind [V.4.1], führt dies zu einem Widerspruch zum Pauliprinzip bzw. dem Spin-Statistik-Theorem. Als Ausweg wurde zunächst durch Greenberg eine Parastatistik für die Quarks postuliert [V.4.2], die später durch die dazu äquivalente Formulierung mit Hilfe einer neuen, inneren Quantenzahl genannt Color, ersetzt wurde [V.4.3]. Danach existieren von jeder Flavoursorte wie u, d, s, c etc. N_c verschiedene Quarks, die sich durch ihre Colorquantenzahl voneinander unterscheiden. Dabei bleibt noch die Möglichkeit offen, die Colorquantenzahl zum Ladungsoperator beitragen zu lassen, wie in Han-Nambu-Modellen, oder nicht, wie bei Gell-Mann-Zweig-artigen Modellen mit Colorquantenzahl (siehe Anhang A1). In Energiebereichen, in denen nur Colorsingletts auftreten, der Colorfreiheitsgrad also nicht angeregt werden kann, sind diese beiden Modelle praktisch nicht unterscheidbar (siehe auch V.3).

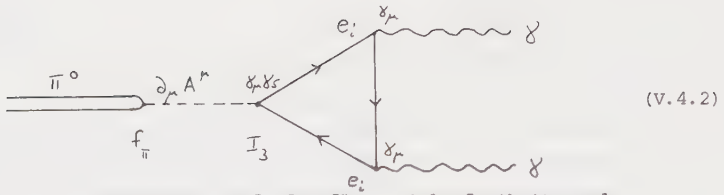
Da die Baryonen aus drei Quarks aufgebaut sein sollen, folgt

$$N_c \geq 3 \quad (V.4.1)$$

Es ist allerdings nicht klar ob für Quarks, die bisher nicht als freie Teilchen beobachtet werden konnten, das Spin-Statistik Theorem gelten muß, da dieses Theorem für asymptotische Zustände abgeleitet wurde.

B) Pionzerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

Dieser Zerfall wird mit Hilfe der PCAC Hypothese [V.4.4] und der Adlerschen Dreiecksanomalie [V.4.5] berechnet



Dabei tritt ein Parameter S auf, der für N_c Colorfreiheitsgrade die Form hat

$$S = N_c \sum_i I_3^i (e_i^2) = N_c \sum_i Y_i (I_3^i)^2 \quad (V.4.3)$$

und experimentell mit $S \approx \frac{1}{2}$ gegeben ist. I_3 bedeutet hier den starken Isospin. (V.4.3) ist für Han-Nambu-artige Modelle nicht anwendbar, da die Quantenzahlen von C abhängen. Doch liefern auch diese Modelle den korrekten Wert von $S = \frac{1}{2}$. Als Lösungen kommen in Frage (siehe (V.3.14) und (V.3.15))

$$N_c = 1 \quad \text{und} \quad e_i = 1,0 \quad (V.4.4)$$

$$N_c = 3 \quad \text{und} \quad e_i = 2/3, -1/3$$

Dabei wird natürlich unterstellt, daß der Prozeß gemäß (V.4.2) erfolgt. Es sollte vielleicht noch erwähnt werden, daß der Prozeß (V.4.2) durch höhere Ordnungen Störungstheorie nicht renormiert wird [V.4.5].

C) Anomaliefreiheit

An dieser Stelle soll ein etwas aus dem übrigen Rahmen fallendes, theoretisches Argument eingeflochten werden, da es sich gut an B) anknüpfen läßt. Existiert ein Eichfeld, das an $\gamma_\mu \gamma_5$ koppelt (schwache Wechselwirkung!), so muß man fordern, daß die im vorigen Paragraphen aufgeführte Anomalie verschwindet. Andernfalls ist die Theorie nicht renormierbar. Dabei sollte jedoch darauf hingewiesen werden, daß die Renormierbarkeit einer Theorie möglicherweise kein fundamentales Prinzip darstellt, sondern vielmehr mit unserer Unfähigkeit zusammenhängen könnte, etwas anderes als Störungstheorie zu betreiben.

Im Rahmen der schwachen Wechselwirkung lautet die Forderung der Anomaliefreiheit jedenfalls

$$\sum (\bar{I}_3^i)^{\text{schwach}} (e_i^i) = 0 \quad (\text{V.4.5})$$

was sich unter der Annahme, daß alle Quarks und Leptonen Isodoublets sind, auch als

$$\sum Y_i^{\text{schwach}} = 0 \quad (\text{V.4.6})$$

schreiben läßt, und vielleicht auf eine tiefere Verbindung von Quarks und Leptonen hindeutet.

Hat man gleich viele Generationen von Quark- (mit Color) und Lepton-Doublets bezüglich des schwachen Isospins,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \dots \quad (\text{V.4.7})$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad \dots$$

so kann man (V.4.5) für jede Generation einzeln erfüllen. Dazu muß für die Quarkladungen gelten

$$\begin{aligned} \text{a) } N_c &= 1 & e_i &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{b) } N_c &= 3 & e_i &= \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.4.8})$$

Man hat also dieselben Ladungs- und Colorzuordnungen wie unter B). Natürlich sind auch andere Mechanismen vorstellbar, um (V.4.5) bzw. (V.4.6) zu erfüllen, doch sieht man, daß eine einfache Erweiterung der Ladungszuordnungen aus B) auf eine anomaliefreie Theorie führt.

D) Elektron-Positron-Vernichtung $e^+e^- \rightarrow h$

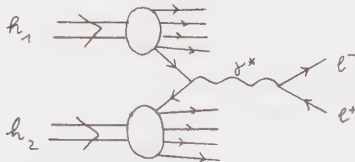
Das Verhältnis $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow h)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ ergibt sich für Spin-1/2 Partonen bei Vernachlässigung von Korrekturen durch Massenterme oder die starke Wechselwirkung einfach zu

$$R = N_c \sum_{\text{Flavors}} e_i^2 \quad (\text{V.4.9})$$

Der Wert von $R \simeq 4-5$ bei Schwerpunktsenergien von $\sqrt{s} = 5-8$ GeV und von $R \simeq 2.5$ bei $\sqrt{s} = 2-4$ GeV läßt sich durch $N_c = 3$ und $e_i = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ plus Korrekturen durch die starke Wechselwirkung erklären (siehe auch V.3). Daneben bestehen natürlich auch noch andere Möglichkeiten wie SU(3)-Oktett-Partonen und $N_c = 1$ oder ähnliches, um $R \simeq 4-5$ zu erreichen.

E) Leptonpaar Erzeugung in hadronischen Reaktionen $h_1 h_2 \rightarrow l^+ l^- X$

Dieser Prozess wird nach Drell und Yang als Parton-Antiparton-Vernichtung mit Bildung eines virtuellen Photons aufgefaßt (siehe Kapitel IV).



(V.4.10)

Da das Leptonensystem ein Colorsinglett ist, tritt im Wirkungsquerschnitt der Colorfaktor N_c auf: $\sigma \propto \frac{1}{N_c}$ (siehe (IV.2.9)). Die theoretischen Vorhersagen geben die Daten nur sehr schlecht wieder [Fig. 10]. Das kann vielerlei Gründe haben: ungenau bekannte Verteilungsfunktionen $\bar{N}_1(x)$ für die Antipartonen im Hadron, Transversalimpulse der Partonen, größere Korrekturen durch die starke Wechselwirkung etc. So kann man nur sagen, daß die Daten mit $N_c = 3$ verträglich sind. $N_c = 1$ kann dabei jedoch nicht ausgeschlossen werden.

F) Tiefinelastische Streuung $lN \rightarrow l'X$

Hier tritt kein Colorfaktor auf, da dieser in die Normierung der Verteilungsfunktionen $N_1(x)$ absorbiert wird

$$\bar{F}_1^e(x) = \frac{1}{N_c} \sum_{i,c} e_i^2 N_i^c(x) = \sum_i e_i^2 N_i(x) \quad (V.4.11)$$

Der Prozeß kann deshalb als Normierung für D) (Faktor N_c) und E) Faktor $1/N_c$) dienen. Außerdem weist $\frac{F_1^e(x)}{F_1^{\nu N}(x)} \simeq 5/18$ auf die Ladungen $e_i = 2/3$ und $-1/3$ hin und ergibt somit zusammen mit B)-E) für die Colorzahl den Wert $N_c = 3$. Man sollte beachten, daß bisher stets von $N_c = 3$ und nicht etwa von $SU(3)$ oder $SO(3)$ etc. die Rede war.

G) Starke Wechselwirkung als geeichter Colorfreiheitsgrad

Um die Stärke der starken Wechselwirkung in hadronischen Reaktionen bei niedrigen Energien und gleichzeitig die Quasifreiheit der Partonen für tiefinelastische Reaktionen verstehen zu können, braucht man eine Wechselwirkung, die für kleine Abstände verschwindet. Eine Möglichkeit dafür bietet eine nichtabelsche Eichtheorie, die nach unserem heutigen Verständnis zu einer asymptotisch freien Theorie führt. Der Colorfreiheitsgrad erscheint dabei als geeigneter Ansatzpunkt für eine Eichtheorie, da diese Quantenzahl Leptonen nicht zukommen soll und so dem Fehlen einer starken Wechselwirkung für Leptonen Rechnung tragen würde. Hat man eine $SU(N_f) \times SU(N_c)$ für die Flavor und Colorsymmetrie, so erhält man eine asymptotisch freie Theorie für

$$N_f < \frac{11}{2} N_c \quad (V.4.12)$$

$$\text{also für } N_f < 16 \quad \text{bei } N_c = 3$$

was bis heute erfüllt ist. Wählt man für die Colorgruppe dagegen eine $SO(3)$ [V.4.6], so fordert die asymptotische Freiheit der Theorie für $N_c = 3$

$$N_f \leq 2 \quad (V.4.13)$$

was im Gegensatz zu den uns heute bekannten 4 (bzw. 5) Flavorfreiheitsgraden steht.

Einen weiteren Hinweis auf N_c kann man aus der Impulsabhängigkeit der Nichtsinglett-Momente erhalten (siehe (II.6.11) mit Anhang A.3).

Man hat

$$M_n^{NS}(Q^2) \propto [e_n(Q^2/\Lambda^2)]^{-\alpha_{NS}} \quad (V.4.14)$$

$$\alpha_{NS} \propto \frac{3 C_2(R)}{22 C_2(R) - 8 T(R)} = \frac{4}{3} \frac{N_c^2 - 1}{N_c [11 N_c - N_f]}$$

Rechnet man den Ausdruck α_{NS} für verschiedene Werte von N_c und N_f aus, so sieht man, daß er nicht sehr stark von diesen Größen abhängt. Dazu kommen dann noch Korrekturen aus höheren Ordnungen der Störungstheorie. Genauere Angaben über N_c lassen sich deshalb aus (V.4.14) nicht gewinnen, besonders da experimentell noch nicht eindeutig feststeht, daß es sich um eine asymptotisch freie Theorie handeln muß und eine Theorie mit endlichem Fixpunkt $g_c \neq 0$ ausgeschlossen ist [V.4.7].

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß alle Daten mit der Annahme (effektiver) gebrochener Ladungen und einem Colorfreiheitsgrad $N_c = 3$ verträglich sind. Davon abweichende Annahmen stoßen im Einzelfall auf Schwierigkeiten. Eine Aussage über die Colorgruppe selbst (z.B. $SU(3)$ oder $SO(3)$) läßt sich nur indirekt über die asymptotische Freiheit der entsprechenden Eichtheorien machen.

V.5 Skalenverletzung

V.5.1 Massenparameter

In dem naiven Partonmodell (ohne massive Spin-1 Partonen) erhält man bei Vernachlässigung von Massenparametern und Transversalimpulsen - und damit letztlich auch der Wechselwirkung der Partonen untereinander - exaktes Skalenverhalten.

Die Daten der letzten Jahre haben jedoch eindeutig das Vorhandensein von Skalenverletzungen gezeigt [Fig. 11]. Um den Beitrag von Massen zu dieser Skalenverletzung zu erhalten, wird man im Parton-Modell die Näherungen

$$\delta[(p_i + q)^2 - p_f^2] = \delta[m_i^2 - m_f^2 + 2p_i \cdot q + q^2] \approx \delta(2p_i \cdot q + q^2) \quad (\text{V.5.1})$$

$$(p_i)_\mu = (\sqrt{m_i^2 + x^2 p_3^2 + p_\perp^2}, p_\perp, x p_3) \approx x(\sqrt{p_3^2 + \Gamma^2}, 0, p_3) = x p_\mu$$

für die Massenschalenbedingung und den Partonimpuls aufgeben (siehe (II.2.20) und (II.2.21)). Vernachlässigt man den Transversalimpuls, so wird man dadurch auf eine neue, dimensionslose Größe

$$\xi = \frac{Q^2 + m_f^2 - m_i^2 + \sqrt{(Q^2 + m_f^2 - m_i^2)^2 + 4m_i^2 Q^2}}{2(\nu + \sqrt{\nu^2 + \Gamma^2 Q^2})} \quad (\text{V.5.2})$$

geführt, die asymptotisch in $x = \frac{Q^2}{2\nu}$ übergeht und für endliche Werte von Q^2 und ν dessen Stelle einnimmt [V.5.1]. Auch im Rahmen der Operatorproduktentwicklung und Lichtkegelalgebra führt eine Berücksichtigung von Massentermen auf diese Variable, so daß die Korrespondenz zwischen Lichtkegelentwicklung und Partonmodell bestehen bleibt.

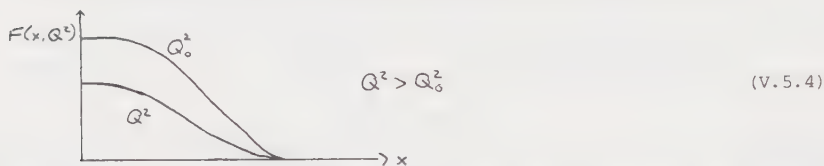
Setzt man die Quarkmassen $m_i = m_f \approx 0$, so stimmt (V.5.2) übrigens mit dem für die Nachtmann-Momente definierten ξ (II.5.20) überein. Vergleicht man die experimentell gefundenen Skalenverletzungen mit denen, die durch die Verwendung von ξ in die Theorie eingeführt werden, so sieht man, daß keine befriedigende Übereinstimmung erzielt werden kann. Masseneffekte allein reichen nicht aus, um die Skalenverletzungen zu erklären. Das gilt insbesondere für Bereiche, in denen $\frac{x^2 M^2}{Q^2} \ll 1$ und $Q^2 \gg m_1^2, m_f^2$, da hier die Massenkorekturen vernachlässigbar sind.

V.5.2 Formfaktoren

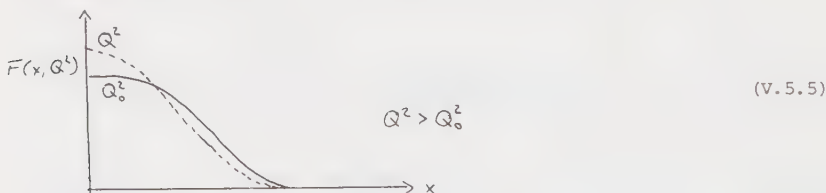
Die Berücksichtigung der Wechselwirkung der Partonen untereinander läßt sich am einfachsten durch die Verwendung von Formfaktoren für die Kopplung an die Partonen erreichen. Die Strukturfunktionen erhalten damit die Form

$$F(x, Q^2) = \frac{f(Q^2)}{f(Q_0^2)} F(x, Q_0^2) \quad (\text{V.5.3})$$

und man würde dieselbe Art der Skalenverletzung für alle x erhalten



Experimentell [Figur 11] nimmt $F(x, Q^2)$ zwar für $x \gtrsim 0.3$ mit steigendem Q^2 ab, wächst aber gleichzeitig für x nahe 0.



Es besteht jedoch stets die Möglichkeit der Anregung neuer schwerer Freiheitsgrade (charm, bottom, top, ...). Für das Massenquadrat des hadronischen Endzustandes $\bar{X}$ gilt nun

$$M_{\bar{X}}^2 = (p+q)^2 = M^2 + 2ME_y(1-x) \quad (V.5.6)$$

so daß eine solche Anregung zuerst bei $x \rightarrow 0$ einsetzen würde und so das Ansteigen von $F(x, Q^2)$ für x nahe 0 erklären könnte. Vektordominanzmodelle legen es nahe, daß der zusätzliche Beitrag durch die Charmproduktion durch

$$\frac{\Delta F_2^c(x \rightarrow 0, Q^2)}{F_2^{u,d,s}(x \rightarrow 0, Q^2)} \approx \frac{2}{3} \frac{Q^2 + m_s^2}{Q^2 + m_d^2} \quad (V.5.7)$$

berechnet werden kann. Die Formel liefert eine gute Beschreibung der Daten, doch ergibt sie einen viel zu großen Wirkungsquerschnitt von $\sigma(Q^2 \approx 0) \approx 3 \mu b$ für die Photoproduktion von Charm [V.5.2]. Der betrachtete Effekt reicht also nicht aus, um die Skalenverletzung zu beschreiben. Immerhin muß er mit berücksichtigt werden.

V.5.3 Skalenverletzung und Regge Theorie

Im Rahmen der Regge Theorie erwartet man, daß

$$\begin{aligned}
 W_1(\nu, Q^2) &\xrightarrow[Q^2 \text{ fest}]{\nu \rightarrow \infty} \beta_1(Q^2) \nu^{\alpha_1(0)} \\
 W_2(\nu, Q^2) &\xrightarrow[Q^2 \text{ fest}]{\nu \rightarrow \infty} \beta_2(Q^2) \nu^{\alpha_2(0)-2} \\
 W_3(\nu, Q^2) &\xrightarrow[Q^2 \text{ fest}]{\nu \rightarrow \infty} \beta_3(Q^2) \nu^{\alpha_3(0)-2}
 \end{aligned} \tag{V.5.8}$$

gilt mit $\alpha_i(t)$ der Reggetrajektorie des ausgetauschten Regge Poles. Der Limes entspricht $x \rightarrow 0$. Durch Summation über alle möglichen Regge Pole (nicht nur das Pommeron mit $\alpha_p(0)=1$) lassen sich Aussagen über das Skalenverhalten und die Abweichungen davon für $x \rightarrow 0$ machen. Im Rahmen des Müller-Regge Formalismus kann man auf ähnliche Weise auch für $x \rightarrow 1$ Aussagen machen. Dieses Verfahren wurde von [V.5.3] auf das sogenannte "Massive Quark Modell" [V.5.4] angewandt. Dabei wurden jeweils die führende und nächst größere Regge-Trajektorie eingesetzt. Außerdem wurde berücksichtigt, daß $F_2(x, Q^2)$ für $Q^2 \rightarrow 0$ linear in Q^2 verschwinden muß, um einen endlichen Photowirkungsquerschnitt zu erhalten (siehe (II.1.9)). Der Ausdruck

$$F_2(x, Q^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{Q^2}{Q^2 + m_S^2} F_2(0, 0) \tag{V.5.9}$$

gibt die Daten sehr gut wieder [Figur 12]. Eine glatte und möglichst einfache Verbindung der beiden Bereiche $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow 1$ führt auf

$$\begin{aligned}
 N(x, Q^2) &= a (1-x)^3 + \frac{b}{\sqrt{x}} (1-x)^5 + \frac{c}{2} \frac{(1-x)^9}{x} \frac{Q^2}{Q^2 + m_S^2} \\
 &\quad + \frac{d}{\sqrt{Q^2}} \sqrt{x} (1-x)^{5/2} + O\left(\frac{1}{Q^2}\right) \\
 \bar{N}(x, Q^2) &= \frac{e}{\sqrt{x}} (1-x)^7 + \frac{f}{\sqrt{Q^2}} \sqrt{x} (1-x)^{13/2} + \frac{c}{2} \frac{(1-x)^9}{x} \frac{Q^2}{Q^2 + m_S^2} \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{Q^2}\right)
 \end{aligned} \tag{V.5.10}$$

mit 6 Parametern a, b, c, d, e, f.

$$2 \times F_1(x, Q^2) = F_2(x, Q^2) = x [N(x, Q^2) + \bar{N}(x, Q^2)] \quad (V.5.11)$$

$$\bar{F}_3(x, Q^2) = N(x, Q^2) - \bar{N}(x, Q^2)]$$

Dabei werden zunächst $a, b, \dots$ und somit N und $\bar{N}$ vom jeweiligen Prozeß ($ep, en, \nu p, \nu n, \bar{\nu} p, \bar{\nu} n$) abhängen, sie lassen sich jedoch durch $SU(3)$ Clebsch-Gordon Koeffizienten miteinander verknüpfen.

Man erhält sehr gute Fits der Impulsabhängigkeit sowohl der Strukturfunktionen als auch der Momente [Figur 13].

Die große Anzahl freier Parameter ist etwas unbefriedigend. Den Ausführungen des nächsten Abschnittes vorgehend beweist das obige Beispiel jedoch eindeutig, daß im Rahmen der heute zur Verfügung stehenden Q^2 -Werte ein Potenzverhalten nicht von der in asymptotisch freien Theorien behaupteten logarithmischen Q^2 -Abhängigkeit mit Sicherheit unterschieden werden kann.

V.5.4 Skalenverletzung und Renormierungsgruppe

Wie in Kapitel II.6 gezeigt wurde, kann man in Feldtheorien mit ultravioletttem Fixpunkt die durch die Wechselwirkung der Partonen untereinander bedingte Impulsabhängigkeit der Momente für $Q^2 \rightarrow \infty$ angeben. Existiert ein solcher Fixpunkt nicht, so wird die effektive Kopplungskonstante im betrachteten Limes monoton anwachsen und schließlich die Anwendbarkeit der Störungstheorie zunichte machen.

Zweckmäßigerweise wird man die Nichtsinglett Momente (NS) (bezüglich Flavor) wie $\int dx x^n [F_2^{u,p} + F_2^{u,n}]$ zur Untersuchung heranziehen, da in diesem Fall das Problem der Operatormischung nicht auftritt. Asymptotisch erwartet man

$$M_n^{NS}(Q^2) \propto_{Q^2 \rightarrow \infty} \begin{cases} \text{konstant} & \text{freie Theorie} \\ (Q^2/\Lambda^2)^{-\frac{1}{2}\gamma_n^{NS}(g_c)} & \text{endlicher Fixpunkt } (g_c \neq 0) \\ [L_n(Q^2/\Lambda^2)]^{-a_n^{NS}} & \text{asymptotisch freie Theorie } (g_c = 0) \end{cases} \quad (V.5.12)$$

(siehe (II.6.11) und (II.6.22)). Die a_n^{NS} lassen sich störungstheoretisch berechnen. Für die $\gamma_n^{NS}(g_c)$ wurde der etwas gewagte Ansatz gemacht, daß [V.5.5]

$$\gamma_n^{NS}(g_c) \simeq c_1 g_c^2 + \dots \quad (V.5.13)$$

also durch den 1-Loop-Beitrag an der Stelle des (angenommenen) Fixpunkts g_c gegeben ist.

Der einfachste, parameterfreie Test ist dann durch das Verhältnis der Logarithmen verschiedener Momente gegeben

$$\frac{\ln[M_n(Q^2)]}{\ln[M_m(Q^2)]} = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_n^{NS}(g_c) / \gamma_m^{NS}(g_c) & (g_c \neq 0) \\ \alpha_n^{NS} / \alpha_m^{NS} & (g_c = 0) \end{array} \right\} \quad (V.5.14)$$

In der 1-Loop-Näherung fallen dann alle Größen heraus, die von den speziellen Gruppen oder $g_c = 0$ bzw. $g_c \neq 0$ abhängen und man testet lediglich den Vektor- bzw. Skalar-Charakter der Gluonen [Figur 14].

Man erhält [V.5.6]

Tabelle 3:

$\frac{\ln[M_n(Q^2)]}{\ln[M_m(Q^2)]}$	"5" "3"	"7" "3"	"6" "2"	"6" "4"
Experiment	1.5 ± 0.8	1.84 ± 0.20	3.00 ± 0.51	1.29 ± 0.06
$\bar{\psi} \gamma_\mu \hat{\sigma} \psi \hat{A}^\mu$ bzw. $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu$	1.46	1.76	2.53	1.29
$\bar{\psi} \hat{\sigma} \psi \phi^a$ bzw. $\bar{\psi} \psi \phi$	1.12	1.16	1.43	1.06

Die Daten favorisieren die Vektorgluonen, doch sollte man die Werte für die skalaren Gluonen mit etwas Skepsis sehen, da die Näherung (V.5.13) fragwürdig ist.

Ein etwas weitergehender Test wird durch die Q^2 -Abhängigkeit der Momente selbst geliefert. Hier tauchen die gruppentheoretischen Vorfaktoren bei α_n^{NS} und $\gamma_n^{NS}(g_c)$ auf, die sich bei der Quotientenbildung weggehoben hatten. Für $\gamma_n^{NS}(g_c)$ sind sie allerdings ohne viel Bedeutung, da g_c selbst nicht bekannt ist. Als zusätzliche freie Parameter treten $M_n(Q_0^2)$ und Λ^2 auf (bzw. $M_n(Q_0^2)$ und g_c).

Die QCD beschreibt die Daten sehr gut [Figur 15], doch erhält man auch für die übrigen Theorien brauchbare Ergebnisse [Figur 16]. Man hat allerdings $0.4 \lesssim \frac{g_c^2}{4\pi} \lesssim 0.6$ für abelsche Vektortheorien und $4 \lesssim \frac{g_c^2}{4\pi^2} \lesssim 6$ für nichtabelsche ($SU(3_c)$) Skalartheorien einzusetzen ($Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$) [V.5.7].

Bemerkungen

Viele der Daten wurden bei relativ kleinen Werten von Q^2 genommen, die schwerlich die Bezeichnung asymptotische Region verdienen.

Der Beitrag des elastischen Kanals nimmt mit steigendem n immer mehr zu [Figur 17] und kann für $n = 7$ bis zu 25% der Daten ausmachen. Die Dominanz dieses Kanales erstreckt sich dabei auf immer größere Werte von Q^2 . Der elastische Kanal muß zwar mit berücksichtigt werden, doch haben kinematische Regionen, in denen ein einziger Kanal die Reaktionen dominiert, kaum etwas mit asymptotischen Verhältnissen zu tun, für die man Aussagen aus der Renormierungsgruppe erwartet.

Mit verhältnismäßig einfachen Annahmen, die nichts mit QCD zu tun haben, hat Harari Schranken für $\mathcal{G}_n / \mathcal{G}_m$ angegeben, die innerhalb der Meßgenauigkeit der Experimente in etwa ausgeschöpft werden [V.5.8]. Als Annahmen wurde, motiviert durch die Reggetheorie, $x F_3 \sim \begin{cases} x^a & x \rightarrow 0 \\ (1-x)^b & x \rightarrow 1 \end{cases}$ mit $a(Q^2) \simeq -\frac{1}{2}$, $b(Q^2) \simeq 3$ und a, b schwach veränderlich mit Q^2 gesetzt und die Groß-Llewellyn-Smith Summenregel $\int dx F_3(x, Q^2) \simeq 3$ zur Normierung verwandt. Solange die Streuung der experimentellen Werte innerhalb der von [V.5.9] abgeleiteten Grenzen nicht abnimmt, besitzt eine Übereinstimmung zwischen einer bestimmten Theorie und den Daten keine sehr große Überzeugungskraft.

Der 2-Loop-Beitrag in der QCD liefert für heutige Energien Korrekturen von 30-50 % [V.5.9] und somit drastische Änderungen. Wegen der logarithmischen Q^2 Abhängigkeit lassen sich diese Korrekturen zwar in einer Neudefinition von Λ^2 absorbieren [V.5.10], für höhere Ordnungen gilt dies jedoch nicht mehr. Wegen der Größe des 2-Loop-Beitrages dürften aber auch diese Terme noch größere Korrekturen verursachen. Es wird deshalb notwendig sein, möglichst bald zu überprüfen, ob sie die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment verbessern oder verschlechtern.

Im Gegensatz zur QCD wird man bei Fixpunkttheorien mit $g_c \neq 0$ die 2-Loop-Korrekturen nicht absorbieren können. Die Größe der angegebenen g_c [V.5.7] lassen ihre Vernachlässigung nicht zu. Aus diesem Grund sollte man aus dem Vergleich mit dem Experiment nur den Schluß ziehen, daß auch Potenzverhalten mit den Experimente verträglich ist. Das hat ja auch V.5.3 gezeigt.

Impulsabhängigkeiten wie in einer asymptotisch freien Theorie erhält man auch im Falle eines endlichen Fixpunktes $g_c \neq 0$, falls $\gamma_n(g_c) = 0$ ist. Da, wie Nachtmann gezeigt hat, γ_n eine konvexe Funktion von n ist [V.5.11], würde es genügen, ein einziges $m > 2$ mit $\gamma_m(g_c) = 0$ zu finden, damit alle γ_n verschwinden. In jeder Ordnung Störungstheorie läßt sich allerdings zeigen, daß für Theorien mit nur einer Kopplungskonstanten, positiv definitem Hilbertraum und Abwesenheit von nichtabelschen Eichfeldern die Annahme $\gamma(g_c \neq 0) = 0$ zu Widersprüchen führt [V.5.12].

V.6 Der Zerfall schwerer Quarksysteme und die Anzahl der Gluonen

V.6.1 Vorbemerkungen

In Abschnitt V.4 wurde gezeigt, daß eine Reihe von experimentellen Befunden für die Existenz einer inneren Quantenzahl der Quarks, genannt Color, spricht. Die Experimente weisen dabei auf die Anzahl $N_c = 3$ für die Colorfreiheitsgrade hin.

Heute ist es allgemein üblich geworden, die starke Wechselwirkung als nichtabelsche Eichwechselwirkung aufzufassen, die an den Colorfreiheitsgrad ankoppelt. Hält man an $N_c = 3$ fest, so stehen einem als mögliche einfache Liealgebren für die nichtabelsche Wechselwirkung $SU(3)$ und $SO(3)$ zur Verfügung [V.6.1]. Die $SO(3)$ stellt einerseits den reellen Anteil der $SU(3)$ dar und ist andererseits isomorph zur Vektordarstellung einer $SU(2)$ ($SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$). Diese Eigenschaft haben H.P. Dürr und H. Saller zu der Spekulation veranlaßt, daß alle "beobachteten" (nichtabelschen) Eichwechselwirkungen als Folge einer einzigen, fundamentalen Eichgruppe ($SU(2)$) verstanden werden können [V.6.2].

Die Verwendung von SO(3) als Eichgruppe weist zunächst einige Nachteile auf.

a) Im Gegensatz zur SU(3) Eichgruppe können für SO(3) auch Diquarksysteme ein Colorsinglett bilden. Solche Objekte wurden aber bis heute nicht beobachtet. Dieses Problem läßt sich beseitigen, wenn man zusätzlich fordert, daß alle physikalisch beobachtbaren Teilchen ganzzahlige Ladungen tragen müssen und man den Quarks selbst drittelzahlige Ladungen zuordnet [V.6.2] (im Rahmen der SU(3) und der üblichen Ladungszuordnungen für die Quarks besitzen Colorsinglettzustände zwar automatisch ganzzahlige Ladungen, doch entspricht dies in gewissem Umfang einem glücklichen Zufall. Eine tiefere Begründung dafür gibt es bis heute nicht).

b) SO(3) Eichwechselwirkungen verlieren nach heutigem Verständnis für mehr als 2 Flavorfreiheitsgrade ($N_F > 2$) die Eigenschaft asymptotisch frei zu sein (für SU(3) erst bei $N_F > 16$), siehe dazu Abschnitt V.4.6. Der experimentelle Nachweis, daß es sich bei der starken Wechselwirkung um eine asymptotisch freie Theorie handeln muß, konnte aber bis heute wegen des beschränkten Energiebereichs, der zur Verfügung steht, noch nicht zweifelsfrei geführt werden (Unterschied $[\ln(Q^2/\Lambda^2)]^\alpha$ und $[(Q^2/\Lambda^2)]^\alpha$, siehe Abschnitt V.5).

Die unter a) und b) aufgeführten Nachteile reichen jedoch nicht aus, um SO(3) als Eichgruppe ausscheiden zu können.

Zur Klärung der Frage der Eichgruppe erscheint es wünschenswert, Experimente zu untersuchen, mit deren Hilfe man die Anzahl der Gluonen N_G bestimmen kann. Eine solche Möglichkeit bieten die hadronischen Zerfälle von Quark-Antiquark-Systemen, falls sie durch Bildung von Gluonen erfolgen. In diesem Falle werden die Zerfallsbreiten nämlich von der zur Verfügung stehenden Anzahl der Gluonen N_G abhängen. Für SO(3) gilt dabei $N_G = 3$ während SU(3) auf $N_G = 8$ führt. Als Beispiel soll im folgenden das Charmoniumsystem (cc) gewählt werden. Für evtl. (mögliche) andere schwere Quarksysteme wie Bottonium (bb), Toponium (tt) etc. gilt entsprechendes.

V.6.2 Das Charmoniumsystem und die Gluonen [V.6.3]

Der hadronische Zerfall von Charmoniumzuständen ($c\bar{c}$) mit Massen, die unterhalb der Schwelle für die Bildung von Paaren von Teilchen mit Charm ($c\bar{c} \rightarrow u\bar{u} + \bar{u}u$ etc.) liegen, kann wegen der Erhaltung der Charmquantenzahl bei der starken Wechselwirkung nur durch Produktion von Gluonen erfolgen ($c\bar{c} \rightarrow 2g, 3g$ etc.).

Für die schweren Quark-Flavor-Zustände ($c, b, t, \dots$) wird nun allgemein angenommen, daß die Quark-Antiquark-Bindungszustände nichtrelativistisch mit Hilfe von Potentialmodellen behandelt werden können. Die effektive Kopplungskonstante, die die Kopplung der Gluonen an die schweren Quarkzustände beschreibt, soll außerdem so klein sein, daß Störungstheorie möglich ist und die erste nichtverschwindende Ordnung den Prozeß mit ausreichender Genauigkeit beschreibt. Schließlich muß noch angenommen werden (in Übereinstimmung mit den üblichen Annahmen des Partonmodells), daß die so berechneten Zerfallsbreiten durch die Bildung der hadronischen Endzustände aus den Gluonen nicht abgeändert werden.

Für die Kopplung der Gluonen an die Quarks werden sowohl für $SU(3)$ als auch für $SO(3)$ folgende Ausdrücke verwandt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= g_s \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : (x) A^a{}^\mu(x) & \alpha_s &= \frac{g_s^2}{4\pi} \\ [\vec{G}^a, \vec{G}^b] &= i \sum_c f^{abc} \vec{G}^c \\ (\vec{G}^a \vec{G}^b)_{kl} &= \frac{1}{2} \sum_c (i f^{abc} + d^{abc}) (\vec{G}^c)_{kl} + \frac{T(R)}{N_c} \delta^{ab} \mathbb{1}_{kl} \\ T(R) \delta^{ab} &= T(\vec{G}^a \vec{G}^b) & T(R) &= \frac{1}{2} \int \bar{u} \gamma_\mu \vec{G}^a = \frac{1}{2} \lambda^a \\ N_c &= \text{Anzahl der Colorzustände} = 3 \text{ für } SU(3) \text{ und } SO(3) \\ N_G &= \text{Anzahl der Gluonen} = \begin{cases} 8 \text{ für } SU(3) \\ 3 \text{ für } SO(3) \end{cases} \end{aligned} \quad (V.6.1)$$

Die λ^a sind die aus der adjungierten Darstellung der $SU(3)$ bekannten 3×3 Matrizen.

Die Standardform der $SO(3)$ ist eigentlich durch $(\hat{\sigma})_{kel} = i \epsilon_{k\alpha\ell}$ gegeben. Der einheitlichen Beschreibung wegen werden hier jedoch für $\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2$ und $\hat{\sigma}^3$ die Matrizen $\frac{1}{2} \lambda^3, -\frac{1}{2} \lambda^5$ und $\frac{1}{2} \lambda^2$ verwandt. Dadurch gelten für $SU(3)$ und $SO(3)$ dieselben Formeln, man hat dabei nur für $SO(3)$ die Indizes a, b in (V.6.1) auf 2, 5 und 7 zu beschränken. Der Unterschied zur Standardform drückt sich dann nur in einer abgeänderten Kopplungskonstanten aus, doch muß deren Größe ohnehin dem Experiment entnommen werden.

Definiert man die Größe $G_{\alpha\beta}^{\mu} := \sum_a (\hat{\sigma})_{\alpha\beta}^a A^{\mu a}$, so sieht man, daß die Ladungskonjugation dem Übergang $G_{\alpha\beta}^{\mu} \rightarrow -G_{\beta\alpha}^{\mu}$ entspricht. Die Colorfaktoren für den Zerfall eines Color-Singlett-Zustandes in n Gluonen werden deshalb durch

$$\left\{ \frac{1}{2\sqrt{N_c}} \left[\text{Tr}(\hat{\sigma}^1 \hat{\sigma}^2 \dots \hat{\sigma}^n) \pm \text{Tr}(\hat{\sigma}^n \dots \hat{\sigma}^2 \hat{\sigma}^1) \right] \right\}^2 \quad (\text{V.6.2})$$

für $C = \pm (-1)^n$ Zustände

gegeben. Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ und die Spurbildung sind dabei Folgen der Color-Singlett-Eigenschaften der Hadronen.

Tabelle 4:

Zustand	1_{S_0}	3_{S_1}	1_{P_1}	3_{P_0}	3_{P_1}	3_{P_2}
J^{PC}	0^{-+}	1^{--}	1^{+-}	0^{++}	1^{++}	2^{++}
Teilchen	η_c	$J/\psi, \psi'$		$\chi(3444)$	$\chi(3508)$	$\chi(3552)$
hadronischer Zerfall	$2g$ 	$3g; \alpha_{ijk}$ 	$3g; \alpha_{ijk}$ 	$2g$ 	$3g, f_{ijk}; g\bar{q}q$ 	$2g$ 
elektromagnetischer Zerfall	2γ 	3γ 	3γ 	2γ 	$4\gamma; g\bar{q}q$ 	2γ 
"gemischter" Zerfall		$2g\gamma$ 	$2g\gamma$ 			

Die vorstehende Tabelle gibt die dominanten Zerfallskanäle des Charmoniumsystems für SU(3) an. Für C = +1 Zustände stimmen sie mit denjenigen für SO(3) überein. Für C = -1 Zustände (J/ψ , ψ' , 1P_1) unterscheiden sich die beiden Modelle jedoch wesentlich (siehe B).

A) Zerfall der C = +1 Zustände

1. Zerfall in zwei Bosonen (Gluonen/Photonen): $^1S_0, ^3P_0, ^3P_2$

Die Zerfallsbreiten in 2 Photonen lauten

$$\Gamma(^1S_0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{4\alpha^2}{3M^2} (e_q)^4 |R_s(0)|^2 \cdot N_c \quad (V.6.3)$$

$$\Gamma(^3P_0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{16\alpha^2}{3M^4} (e_q)^4 |R'_p(0)|^2 \cdot N_c$$

$$\Gamma(^3P_2 \rightarrow 2\gamma) = \frac{64\alpha^2}{45M^4} (e_q)^4 |R'_p(0)|^2 \cdot N_c$$

mit M der Masse der Zustände, e_q der Ladung der Quarks und $R(0)$ (bzw. $R'(0)$) dem Radialanteil (bzw. dessen Ableitung) der Wellenfunktion am Ursprung.

Das Verhältnis der hadronischen zu den elektromagnetischen Zerfallsbreiten rührt von den Colorfaktoren her und lautet in allen Fällen

$$\frac{\Gamma(\dots \rightarrow 2g)}{\Gamma(\dots \rightarrow 2\gamma)} = \left(\frac{\alpha_s^2}{e_q^4 \alpha^2} \right) \left(\frac{T(R)}{N_c} \right) N_c \quad (V.6.4)$$

und ist somit proportional der Anzahl der Gluonen. Ein Verhältnis der effektiven Kopplungskonstanten α_{so} für SO(3) zu α_{su} für SU(3) von

$$\frac{\alpha_{so}}{\alpha_{su}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1,6 \quad (V.6.5)$$

führt somit auf dieselben Zerfallsbreiten für beide Arten der Eichwechselwirkungen.

2. Zerfall des 3P_1

Beim Zerfall des 3P_1 Zustandes treten Infrarotprobleme auf, die zu Logarithmen in den Zerfallsbreiten führen. Die führenden Terme aus den 3-Gluon-Kanälen ( und ) heben sich gerade weg, so daß der Zerfall durch $^3P_1 \rightarrow gq\bar{q}$ () dominiert wird.

$$\Gamma(3\rho_1 \rightarrow g q \bar{q}) = \frac{128}{3\pi} \frac{\alpha_s^3}{M^4} \ln\left(\frac{M}{\Delta}\right) |R'_\rho(0)|^2 \left(\frac{T^3(R) N_G N_f}{N_c}\right) \quad (\text{V.6.6})$$

Für den Abschneideparameter Δ kann man $\Delta \approx R^{-1} \approx .5 \text{ (GeV/c}^2\text{)}$ wählen.

Ein zu 1) analoges Vorgehen liefert dasselbe Verhältnis für α_{s0}/α_{su} wie (V.6.5).

B) Zerfall von C = -1 Zuständen : $J/\psi, \psi', \psi'', \frac{1}{2}P_1$

Die beiden Modelle (SU(3) und SO(3)) unterscheiden sich drastisch in der Behandlung von Zerfällen von C = -1 Zuständen. Die weiter oben verwandte Beschreibung der Ladungskonjugation durch $G_{\alpha\beta}^\mu \xrightarrow{C} -G_{\beta\alpha}^\mu$ ($G_{\alpha\beta}^\mu = \sum_{\alpha} (\frac{\alpha}{\beta})_{\alpha\beta} A^\mu$), zusammen mit der Tatsache, daß die Kopplungsmatrizen der SO(3) ($\frac{1}{2}\lambda^3, -\frac{1}{2}\lambda^5, \frac{1}{2}\lambda^2$) schief symmetrisch sind bedeutet, daß die Eichbosonen unter Ladungskonjugation ihr Vorzeichen nicht wechseln. Im SO(3) Modell läßt sich somit kein Colorsinglett-Zustand negativer C-Parität allein aus Gluonen bilden.

Die oben verwandte Definition der Ladungskonjugation ist unüblich da sie nicht berücksichtigt, daß die Quarkzustände abhängig von ihrem Colorindex unterschiedliches Transformationsverhalten unter Ladungskonjugation haben können. Verwendet man im SO(3) Fall als Analogon für Color den Isospin (SO(3) ist ja isomorph zur Vektordarstellung einer SU(2)), so kann man den Quantenzahlen nach die Gluonen mit den g -Mesonen in Beziehung setzen, die negative C- und positive G-Parität besitzen. Der Vergleich zeigt, daß obige Definition der C-Konjugation für SO(3) eher einer "Color-G-Konjugation" entspricht. Da alle physikalischen Zustände aber Color-Singletts (Analogon: Isosingletts) sein müssen, fällt für sie die C-Konjugation mit der "Color-G-Konjugation" zusammen. So entspricht die Aussage, daß Isosingletts mit C = -1 (also G = -1) nicht durch starke Wechselwirkung in g -Mesonen (G = +1) übergehen können der zuvor gemachten Behauptung, daß C = -1 Color-Singlett-Zustände im SO(3) Modell stabil sind bezüglich starker Zerfälle in Gluonen. Das bedeutet eine strengere Gültigkeit der Zweig-Regel für

$C = -1$ Zustände, als man sie für $SU(3)$ erwartet. Man hätte so auch eine gute Erklärung, warum neutrale, schwere $C = -1$ Zustände in geringerem Maße aus Quark-Antiquark-Paaren verschiedener Flavoursorten aufgebaut sind als dies für $C = +1$ Teilchen gilt.

Neben diesen Vorteilen bleibt das große Problem bestehen, wie man im $SO(3)$ Modell den hadronischen Zerfall von $C = -1$ Zuständen beschreiben kann, der üblicherweise durch rein gluonische Zwischenzustände erklärt wird ($J/\psi \rightarrow 3g$, $^1P_1 \rightarrow 3g$ etc). In diesem Modell erwartet man, daß er die elektromagnetische Wechselwirkung mit einbeziehen muß, also rein elektromagnetischer Art ist ($J/\psi \rightarrow \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$: ) oder elektromagnetische und starke Wechselwirkung kombinieren muß

$$(J/\psi \rightarrow \gamma^* g g \rightarrow q\bar{q} g g : \text{diagram} \quad \text{oder} \quad J/\psi \rightarrow \gamma g g : \text{diagram}) .$$

Sollte sich kein anderer Ausweg finden lassen, so führt das auf zu kleine Zerfallsbreiten bzw. auf die Forderung, daß ein größerer Prozentsatz von hadronischen Zerfällen ein hartes, reelles Photon beinhalten muß, im Widerspruch zum Experiment.

Im $SU(3)$ Modell erfolgt der Zerfall von $C = -1$ Zuständen über einen 3-Gluon Zwischenzustand (). Man stößt hier auf keine Probleme, da man neben den schiefssymmetrischen Kopplungsmatrizen ($\lambda^2, \lambda^5, \lambda^7$) auch symmetrische hat ($\lambda^1, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^6, \lambda^8$) und somit Gluonzustände mit $C = -1$ konstruieren kann. Für $\alpha_s \approx .2$

(aus $\frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow \text{Hadronen})}{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)}$) erhält man befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

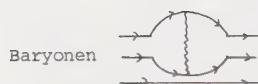
C) Das Potentialmodell und die Gluonen

Bei der Berechnung der Massen der verschiedenen Charmzustände verwendet man eine Überlagerung aus einem $\frac{1}{r}$ Potential, das vom Austausch eines Gluons herrühren soll und einen mit r anwachsenden Potential, durch das man den confinement Rechnung tragen will. In der 1-Gluon-Austausch-Näherung erhält man für die Stärke des $\frac{1}{r}$ Anteils



$$\alpha_s \left(\frac{T(R) N_c}{N_c} \right)$$

(V.6.7)



$$\alpha_s \left(\frac{T(R) N_c}{2 N_c} \right)$$

Für beide Modelle (SU(3) und SO(3)) verhält sich die Bindungsstärke für Mesonen zu Baryonen wie 2:1. Ein

$$\frac{\alpha_{s_0}}{\alpha_{s_u}} = \frac{8}{3} \approx 2.7 \quad (V.6.8)$$

führt somit auf dieselben Werte für die Stärke des $\frac{1}{r}$ Potentials.

D) Schlußbemerkungen

Wie dieser Abschnitt gezeigt hat erhält man für $\alpha_{s_0} \approx 2 \alpha_{s_u}$ in einer Reihe von Fällen etwa gleiche Voraussagen für das Charmoniumsystem. Schwierigkeiten treten bei den Zerfällen von $C = -1$ Zuständen für das SO(3) Modell auf.

Ein rein hadronischer Zerfall scheint hier nicht möglich zu sein und die Einbeziehung der elektromagnetischen Wechselwirkung führt auf Probleme. Die Zweig-Regel, die für SU(3) näherungsweise gilt, scheint für SO(3) und $C = -1$ Zustände zu gut erfüllt zu sein.

VI. Möglichkeiten einer vereinheitlichten Beschreibung der Wechselwirkungen

VI.1 Komplexe Struktur im Lokalen

Wie die Experimente der letzten Jahre gezeigt haben, lassen sich die schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen sehr gut im Rahmen des sogenannten Weinberg-Salam-Modelles als $SU(2) \times U(1)$ Eichtheorie beschreiben [VI.1.1]. Kontroversen über die Existenz paritätsverletzender Effekte in schweren Atomen haben eine Reihe von Autoren veranlaßt, eine Erweiterung des Modelles auf eine $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ Eichtheorie vorzunehmen [VI.1.2]. Nimmt man noch die starke Wechselwirkung als $SU(3)$ Eichtheorie hinzu, wie es die QCD vorschlägt [VI.1.3], so hat man eine $SU(3) \times SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ Eichtheorie mit 15 Eichfeldern und 4 verschiedenen Kopplungskonstanten - von den sog. Higgsfeldern mit ihren Kopplungskonstanten ganz zu schweigen.

Es ist klar, daß man eine Vereinheitlichung anstrebt, in der nur noch eine einzige Kopplungskonstante auftritt. Dies geschieht meist durch Eichung einer Gruppe G , für die $SU(3) \times SU(2) \times SU(2) \times U(1) \subset G$ gilt. Durch eine Hierarchie von Symmetriebrechungen wird dann G auf diejenigen Untergruppen heruntergebrochen, durch die man die physikalisch beobachteten Wechselwirkungen beschreiben möchte. Erstere Ordnung Störungstheorie und Renormierungsgleichungen ergeben gleitende Kopplungskonstanten $\bar{g}_i(Q^2)$, die mit der ursprünglichen Kopplungskonstanten g_0 durch

$$\frac{1}{\bar{g}_i^2(Q^2)} = \frac{1}{g_0^2} + b_i \ln\left(\frac{Q^2}{M^2}\right) \quad (\text{VI.1.1})$$

verknüpft sind. Die b_i sind gruppentheoretische Faktoren, die sich aus G und den gewünschten Symmetriebrechungen ergeben.

Bei $Q^2 = M^2$ sind alle Kopplungen gleich der ursprünglichen Kopplung g_0 und man erhält die volle, durch G beschriebene Symmetrie zurück. Typische Größenordnungen für diesen Symmetriepunkt sind $M \sim 10^{15} - 10^{16}$ (GeV/c²) [VI.1.4]. Diese Größenordnung erschwert die Verifizierung entsprechender Theorien erheblich.

Aus Festkörper-, Atom- und Kernphysik kennt man normalerweise ein umgekehrtes Verhalten. Eine reichhaltige Struktur und damit auch Symmetrie,

die man für niedrige Energien beobachtet, bricht für höhere Energien zusammen, da sie lediglich der Ausdruck des Vielteilchenaspektes dieser Gebiete ist. Für hohe Energien brechen die Bindungen auf und man erkennt die einfache Symmetrie der zugrunde liegenden Wechselwirkung.

In der Elementarteilchentheorie sagt man jedoch für höhere Energien eine Vergrößerung der Symmetrie voraus. Der Grund für dieses Vorgehen hängt vermutlich mit der störungstheoretischen Behandlung der Feldtheorien zusammen. Unterhalb gewisser Energieschwellen lassen sich durch Wahl großer Massenparameter nach Appelquist und Carazzone Freiheitsgrade zwar effektiv abschalten [VI.1.5]. Es ist aber unmöglich, neue Freiheitsgrade zu generieren. Alle (im Niederenergetischen) beobachteten Freiheitsgrade (und noch einige mehr) müssen fundamental in der Lagrangefunktion (und damit im Lokalen, also für hohe Energien) eingeführt werden.

Daß diese 1:1 Korrespondenz zwischen lokalen Freiheitsgraden und beobachteten Strukturen nicht stimmen kann, sieht man schon am Beispiel des Positroniums im Rahmen der QED. Auch die Quarktheorie bzw. QCD macht davon Gebrauch, wenn sie die Hadronen als Bindungszustände der (lokalen, fundamentalen) Quarkfelder auffaßt.

VI.2 Einfache Struktur im Lokalen

Ein dem Vorgehen des vorausgegangenen Abschnittes entgegengesetzter Weg zur Erklärung der im Experiment beobachteten komplexen Strukturen wird von Dürr und Saller [VI.2.1] untersucht. Sie versuchen, die bei heutigen Experimenten beobachteten höheren Symmetrien als Folge einer spontan gebrochenen, fundamental in der Lagrangefunktion verankerten SU(2) zu verstehen. In sehr vereinfachter Form soll der Grundgedanke am Goldstone-Modell [VI.2.2] erläutert werden.

Vor der spontanen Symmetriebrechung hat man zwei geladene Felder ϕ und ϕ^* , die Darstellungen einer U(1) Symmetrie sind. Die spontane Symmetriebrechung führt nun auf ein Goldstone-Teilchen Θ , das sich nichttrivial unter der U(1) transformiert. Dieses Teilchen umgibt das ursprüngliche Feld ϕ in Form einer Wolke und schirmt so dessen U(1) Ladungseigenschaft ab $\varphi = e^{-i\Theta} \phi$.

Die Idee von Dürr und Saller besteht nun in der Annahme, daß bestimmte kinematische Bereiche besser beschrieben werden können (die ursprüngliche

Lagrangefunktion besser linearisiert wird), wenn man neben den neuen Feldern Θ und ξ weiterhin die ursprünglichen Felder ϕ und ϕ^* verwendet.

Im Rahmen einer $SU(2)$ -symmetrischen Theorie würde dies bedeuten, daß neben dem ursprünglich vorhandenen Dublett (nichttriviale $SU(2)$ Eigenschaften) noch zwei Singletts auftreten (neutral bezüglich $SU(2)$). Diese Klassifizierung besitzt eine starke Ähnlichkeit mit der $SU(4)$ Klassifizierung der Quarks.

Gleichzeitig neben der Vervielfachung der Freiheitsgrade auf dem "Quarksektor" scheint bei Eichtheorien die Möglichkeit zu bestehen, als Folge der Brechung einer $SU(2)$ ein zusätzliches $U(1)$ "Eichfeld" im Niederenergetischen einzuführen. In diesem Fall ließe sich die $SU(2) \times U(1)$ des Weinberg-Salam Modelles als niederenergetische Folge einer gebrochenen $SU(2)$ Eichtheorie verstehen [VI.2.3]. Für hohe Energien werden natürlich Abweichungen auftreten, da hier die zusätzliche $U(1)$ nicht wirklich lokal zur Verfügung steht. Im folgenden Abschnitt soll ein einfaches Modell angegeben werden, mit dessen Hilfe man die dabei auftretenden Veränderungen beschreiben kann.

VI.3 Modell

Um eine Weinberg-Salam-artige $SU(2) \times U(1)$ Theorie zu simulieren, in der die $U(1)$ als niederenergetische Folge einer gebrochenen $SU(2)$ auftritt, sollen für die entsprechenden Wechselwirkungen Formfaktoren eingeführt werden. Man hat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & g' \bar{\psi} \left[\frac{1}{2} \gamma_L b_L(q^2) \gamma_-^\mu + \frac{1}{2} \gamma_R b_R(q^2) \gamma_+^\mu \right] \psi(x) \beta_\mu(x) \\ & - g \bar{\psi} \left[\vec{I}_L w_L(q^2) \gamma_-^\mu + \vec{I}_R w_R(q^2) \gamma_+^\mu \right] \psi(x) \vec{W}_\mu(x) \end{aligned} \quad (VI.3.1)$$

$$\gamma_\pm^\mu = \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 \pm \gamma_5)$$

Die spontane Symmetriebrechung bewirkt eine Mischung der bezüglich des Isospins neutralen Eichfelder

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_w) & \cos(\theta_w) \\ \cos(\theta_w) & \sin(\theta_w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.2})$$

wie im Weinberg-Salam-Modell. Außerdem hat man

$$e = g \sin(\theta_w) = g' \cos(\theta_w)$$

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} \quad \text{also} \quad M_W^2 \simeq \frac{37 \text{ GeV}^2/c^2}{\sin^2(\theta_w)}, \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos(\theta_w)} \quad (\text{VI.3.3})$$

$$b_L(0) = b_R(0) = w_L(0) = w_R(0) = 1$$

Mit diesen Definitionen und Relationen nimmt (VI.3.1) die Form an

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = e : \bar{\psi} \{ & [(w_L(q^2) - b_L(q^2)) I_{3L} + b_L(q^2) Q] \gamma_-^\mu \\ & + [(w_R(q^2) - b_R(q^2)) I_{3R} + b_R(q^2) Q] \gamma_+^\mu \} \psi : (x) A_\mu(x) \\ & - \frac{g}{\cos(\theta_w)} : \bar{\psi} \{ [(w_L(q^2) \cos^2(\theta_w) + b_L(q^2) \sin^2(\theta_w)) I_{3L} - b_L(q^2) \sin^2(\theta_w) Q] \gamma_-^\mu \\ & + [(w_R(q^2) \cos^2(\theta_w) + b_R(q^2) \sin^2(\theta_w)) I_{3R} - b_R(q^2) \sin^2(\theta_w) Q] \gamma_+^\mu \} \psi : (x) Z_\mu(x) \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} : \bar{\psi} [w_L(q^2) \bar{I}_L^\dagger \gamma_-^\mu + w_R(q^2) \bar{I}_R^\dagger \gamma_+^\mu] \psi : (x) \bar{W}_\mu(x) \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} : \bar{\psi} [w_L(q^2) \bar{I}_L^\dagger \gamma_-^\mu + w_R(q^2) \bar{I}_R^\dagger \gamma_+^\mu] \psi : (x) \bar{W}_\mu^\dagger(x) \end{aligned} \quad (\text{VI.3.4})$$

$$\bar{I}_{L,R}^\dagger = \frac{1}{2} (\bar{I}_{L,R}^1 \pm i \bar{I}_{L,R}^2)$$

$$\bar{W}_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm i W_\mu^2)$$

Da rechtshändige Ströme bis heute nicht beobachtet wurden (siehe Kapitel V.2), wird im folgenden stets $I_R = 0$ gesetzt. Außerdem sei der Einfachheit halber

$b_L(q^2) = b_R(q^2)$ angenommen. Da dem Konzept entsprechend B_μ und W_μ^0 aus einem gemeinsamen, fundamentalen $SU(2)$ Eichfeld entstanden sein sollen, wird außerdem

$$\begin{aligned} b_L(q^2) &= b_R(q^2) = 1 - \Delta(q^2) \\ w_L(q^2) &= 1 + \Delta(q^2) \end{aligned} \quad (\text{VI.3.5})$$

$$\Delta(0) = 0 \quad \Delta(-\infty) = 1$$

angenommen.

Für die schwachen geladenen Ströme bedeutet dies nur einen Anstieg des Wirkungsquerschnittes für $q \rightarrow -\infty$. Drastischere Änderungen treten auf für die elektromagnetische und neutrale schwache Wechselwirkung auf. Die entsprechende Wechselwirkung lautet nun

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I' &= e: \bar{\psi} \left[2 \Delta(q^2) I_3 \gamma^\mu + (1 - \Delta(q^2)) Q \gamma^\mu \right] \psi(x) A_\mu(x) \\ &\quad - \frac{g}{\cos(\theta_w)} : \bar{\psi} \left\{ [1 - (1 - 2 \sin^2(\theta_w)) \Delta(q^2)] I_3 \gamma^\mu - \sin^2(\theta_w) (1 - \Delta(q^2)) Q \gamma^\mu \right\} \psi(x) Z_\mu(x) \end{aligned} \quad (\text{VI.3.6})$$

Wie zu erwarten gehen die Wechselwirkungen asymptotisch in eine an I_3 gekoppelte V-A Wechselwirkung über.

VI.4 Tiefinelastische Streuungen

Die Effekte des im vorigen Abschnitts eingeführten Formfaktors lassen sich am leichtesten in rein leptonischen Reaktionen untersuchen, da dort die Dinge nicht durch die Existenz verschiedener Partonen mit unterschiedlichen Quantenzahlen und Verteilungsfunktionen verkompliziert werden. So erwartet man beispielsweise, daß für hohe Energien etwa gleich viele Partonen wie Antipartonen im Hadron vorkommen. Dadurch würde aber auch bei reiner V-A Kopplung eine Winkelverteilung $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 + (1-y)^2$ auftreten, eine Winkelverteilung also, die reiner V bzw. A Kopplung entspricht.

Um Beiträge der geladenen schwachen Ströme auszuschließen, betrachten wir Reaktionen wie $\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu e$, $\bar{\nu}_e \mu \rightarrow \bar{\nu}_e \mu$ oder $e^+ \mu^+ \rightarrow e^+ \mu^+$. Für Neutrinostreuung gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^v}{d\Omega} = & \frac{G^2 m E}{2\pi} \left(\frac{M_E^2}{M_E^2 + Q^2} \right)^2 \left[1 + (1-2\sin^2\theta_w) \Delta(Q^2) \right]^2 \left\{ [1-2\sin^2\theta_w - \Delta(Q^2)]^2 1 + 4\sin^4\theta_w (1-\Delta(Q^2))^2 (1-y)^2 \right\} \\ & + \frac{4\alpha G m E}{\sqrt{2} Q^2} \left(\frac{M_E^2}{M_E^2 + Q^2} \right) \Delta(Q^2) [1 + (1-2\sin^2\theta_w) \Delta(Q^2)] \quad \text{VI.4.1} \\ & + \frac{4\pi\alpha^2 m E}{Q^4} \Delta^2(Q^2) \left\{ 1 + (1-\Delta(Q^2))^2 (1-y)^2 \right\} \end{aligned}$$

Für Antineutrino-Streuung hat man 1 und $(1-y)^2$ miteinander zu vertauschen.

Im Weinberg-Salam-Modell ($\Delta \approx 0$) wird der Winkel θ_w (Weinberg-Winkel) aus der Stärke der V-A bzw. V+A Kopplung bestimmt. Mit diesem Verfahren kann man hier effektive Winkel θ_L und θ_R definieren

$$\begin{aligned} \sin^2[\theta_L(Q^2)] &= \sin^2[\theta_w] + [2\sin^4\theta_w - 2\sin^4\theta_w - \kappa(Q^2) \Delta(Q^2) + [\frac{1}{2} - \sin^2(\theta_w)] \Delta^2(Q^2)] \quad \text{VI.4.2} \\ \sin^2[\theta_R(Q^2)] &= \sin^2[\theta_w] + [-2\sin^4(\theta_w) - \kappa(Q^2)] \Delta(Q^2) + [-\sin^2(\theta_w) + 2\sin^4(\theta_w) + \kappa(Q^2)] \Delta^2(Q^2) \\ \kappa(Q^2) &= \frac{\sqrt{2} \pi \alpha}{G M_E^2} \left(\frac{M_E^2 + Q^2}{Q^2} \right) \end{aligned}$$

Die Divergenz von $\kappa(Q^2)$ für $Q^2 \rightarrow 0$ tritt wegen $\Delta(0)=0$ nicht auf, falls $\Delta(Q^2) = (\frac{Q^2}{M^2})^\alpha + \dots$ mit $\alpha > 1$ gilt. Im Falle $\alpha = 1$ unterscheiden sich θ_L und θ_R auch für $Q^2 = 0$ von θ_w . Für $\alpha > 1$ ist dies nicht der Fall. Ein propagatorartiger Formfaktor

$$\Delta(Q^2) = \frac{Q^2}{M^2 + Q^2} \quad \text{VI.4.3}$$

führt zu

$$\sin^2[\theta_{L,R}(s)] = \sin^2[\theta_R(s)] = \sin^2(\theta_w) - \frac{\sqrt{2} \pi \alpha}{G M^2} + O\left(\frac{Q^4}{M^4}\right) \quad \text{VI.4.4}$$

was auch für $M = 100 \text{ (GeV/c}^2\text{)}$ noch eine bedeutende Modifikation darstellt

$$\sin^2[\theta_{L,R}(0)] = \sin^2(\theta_w) - .32 \quad \text{VI.4.5}$$

Die Gleichung (VI.4.4) bleibt auch im komplizierteren Fall der Neutrino-Nukleon-Streuung $\bar{\nu} N \rightarrow \bar{\nu} X$ noch gültig.

Entwickelt man (VI.4.1) mit Hilfe von (VI.4.3) und (VI.4.4) nach Potenzen von Q^2 , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^v}{d\Omega} = & \frac{G^2 m E}{2\pi} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta_L)^2 \cdot 1 + 4 \sin^4(\theta_L) \cdot (1-y)^2 \right] \\ & + \frac{G^2 m E}{2\pi} Q^2 \left\{ \left[-2 \frac{(1+2\kappa)(1+4\kappa - 2 \sin^2 \theta_L) - (1+2\kappa - 2 \sin^4(\theta_L))^2}{M_L^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{(1+2\kappa - 2 \sin^2 \theta_L)(1+4\kappa - 2 \sin^2(\theta_L))}{M_L^2} \right] \cdot 1 + \left[16 \frac{\kappa^2 + \kappa \sin^2 \theta_L - \sin^4 \theta_L}{M_L^2} - 8 \frac{\sin^2 \theta_L (\kappa + \sin^2 \theta_L)}{M_L^2} \right] (1-y)^2 \right\} \\ & + O\left(\frac{Q^4}{M_L^4}\right) \end{aligned} \quad (VI.4.6)$$

$$\theta_L = \theta_L(Q^2=0) \quad \kappa = \frac{\sqrt{2} \pi \alpha}{G M_L^2}$$

Der Wirkungsquerschnitt für Antineutrinos folgt wieder durch Vertauschen von 1 und $(1-y)^2$.

Bemerkungen

Für $M_L \simeq M_Z$ sind die durch das "Aussterben" der U(1) verursachten Effekte etwa von gleicher Größenordnung wie diejenigen des Z-Bosons. Man kann sie deshalb zunächst schwer trennen. Die abkoppelnde U(1) Wechselwirkung wird jedoch auf eine V-A Kopplung führen, was zu $\frac{d\sigma^v}{d\Omega} \propto 1$ und $\frac{d\sigma^v}{d\Omega} \propto (1-y)^2$ führt. Für die effektiven Winkel $\theta_{L,R}$ bedeutet das, daß $\theta_{L,R}(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$ gilt.

Die Neutrino-Streuungen sind schwer zu untersuchen, da in niedrigster Näherung der Wirkungsquerschnitt proportional der Targetmasse ist. Für die Leptonen als Target führt das zu sehr kleinen Wirkungsquerschnitten. Aus demselben Grund ist es auch schwer, große Impulsüberträge zu erreichen ($Q^2 \leq 2mE$).

Freie Leptonen stehen als Target nicht zur Verfügung. Reaktionen an Elektronen in Festkörpern werden nur einen Bruchteil der gesamten Reaktionen ausmachen, da die Neutrino-Hadronstreuungen wegen der größeren Targetmassen dominieren werden.

Ähnliche Schwierigkeiten treten auch bei den weiteren möglichen leptotonischen Wechselwirkungen wie $ee \rightarrow ee$ oder $e\mu \rightarrow e\mu$ auf.

VI.5 Elektron-Positron-Paarvernichtung

Für zeitartige Impulsüberträge lassen sich die Effekte an der mit großer Statistik in Speicherringen vorkommenden Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ untersuchen. Man kann dabei den totalen Wirkungsquerschnitt, Winkelverteilungen oder Polarisierungen der Teilchen mit theoretischen Vorhersagen vergleichen. Hier sollen die Formeln für die sogenannte Ladungsasymmetrie

$$\Delta C(\phi) = \frac{\alpha \sigma}{\alpha \cos(\phi)}(\phi) - \frac{\alpha \sigma}{\alpha \cos(\phi)}(\phi + 180^\circ) \quad (\text{VI.5.1})$$

und die longitudinale Polarisation

$$\Delta R(\phi) = \frac{\alpha \sigma}{\alpha \cos(\phi)}(R=+1) - \frac{\alpha \sigma}{\alpha \cos(\phi)}(R=-1) \quad (\text{VI.5.2})$$

des auslaufenden μ^- angegeben werden. Die entsprechenden Werte für das μ^+ ergeben sich daraus durch Vorzeichenumkehr.

Durch Verwendung polarisierter Strahlen kann man die Messung der Polarisation des auslaufenden μ 's vermeiden, was experimentell von Vorteil sein kann. Die Formel (VI.5.2) behält dabei ihre Gültigkeit.

$$\begin{aligned} \Delta C(\phi) = 4 \cos(\phi) \left\{ \frac{\pi \alpha^2}{8s} [1 - (1 - \Delta(s))^2]^2 - \frac{G\alpha}{8\sqrt{2}} \left(\frac{n_z^4}{n_z^2 - s} \right) [(1 + \Delta(s) - 2 \sin^2 \theta_\omega) + 2 \sin^2 \theta_\omega (1 - \Delta(s))^2]^2 \right. \\ \left. + \frac{G^2 s}{64\pi} \left(\frac{n_z^2}{n_z^2 - s} \right)^2 [(1 + \Delta(s) - 2 \sin^2 \theta_\omega)^2 - 4 \sin^4 \theta_\omega (1 - \Delta(s))^2]^2 \right\} \quad (\text{VI.5.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta R(\phi) = -(1 + \cos(\phi))^2 \left\{ \frac{\pi \alpha^2}{8s} [1 - (1 - \Delta(s))^4] - \frac{G\alpha}{8\sqrt{2}} \left(\frac{n_z^4}{n_z^2 - s} \right) [(1 + \Delta(s) - 2 \sin^2 \theta_\omega)^2 - 4 \sin^2 \theta_\omega (1 - \Delta(s))^4] \right. \\ \left. + \frac{G^2 s}{64\pi} \left(\frac{n_z^2}{n_z^2 - s} \right)^2 [(1 + \Delta(s) - 2 \sin^2 \theta_\omega)^4 - 16 \sin^2 \theta_\omega (1 - \Delta(s))^4] \right\} \end{aligned}$$

s ist das Quadrat der Schwerpunktsenergie.

Für $\Delta(s)$ soll wieder der propagatorartige Formfaktor $\Delta(Q^2)$ (VI.4.3) verwandt werden mit $s = -Q^2$. Entwicklung nach Potenzen von s führt auf

$$\Delta C(\phi) = 4 \cos(\phi) \left\{ -\frac{G\alpha}{8\sqrt{2}} + \frac{\pi^2 \alpha s}{2 M_L^4} - \frac{G\alpha s}{8\sqrt{2}} \left[\frac{1}{M_Z^2} - \frac{2(1-2\sin^2(\theta_w))}{M_L^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{G^2 s}{64\pi} (1-4\sin^2(\theta_w))^2 \right\} + O\left(\frac{s^2}{M^4}\right) \quad (\text{VI.5.4})$$

$$\Delta R(\phi) = -(1+\cos(\phi))^2 \left\{ -\frac{G\alpha}{8\sqrt{2}} (1-4\sin^2(\theta_w)) + \frac{\pi\alpha^2}{2 M_L^2} - \frac{s}{4} \frac{\pi\alpha^2 s}{M_L^4} - \frac{G\alpha s}{8\sqrt{2}} \left[\frac{1}{M_Z^2} - \frac{1-4\sin^2(\theta_w)}{M_L^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{G^2 s}{64\pi} \left[(1-4\sin^2(\theta_w))^4 - 16\sin^8(\theta_w) \right] \right\} + O\left(\frac{s^2}{M^4}\right)$$

Auch hier führt $M_L \approx M_Z$ auf entsprechende Effekte von etwa gleicher Größenordnung. Figur [17] zeigt als Beispiel die relative Ladungsasymmetrie und Polarisierung für $\phi = 0$, $M_L = \infty$ (Weinberg-Salam-Modell) bzw. $M_L = M_Z$ und einen effektiven Weinbergwinkel von $\sin^2 \theta_L = .2$.

Eine endliche Ladungsasymmetrie erhält man schon im Rahmen der QED durch Prozesse höherer Ordnung wie z.B. den 2 Photon-Austausch. Wegen der Paritätserhaltung der QED gilt dies nicht für $\Delta R(\phi)$.

Die Winkelverteilung des Prozesses wird von der $(1+\cos^2(\phi))$ -Verteilung asymptotisch in eine $(1+\cos(\phi))^2$ -Verteilung übergehen. Auch hier erhält man jedoch schon Korrekturen durch höhere Ordnungen in der QED.

Zusammenfassend kann man sagen, daß trotz der offensichtlichen Paritätsverletzung, die im Rahmen des vorgeführten Modells in die elektromagnetische Wechselwirkung eingeführt wurde, die sich daraus ergebenden Effekte für mittlere Energien nur schwer von den Effekten aus der schwachen neutralen Wechselwirkung zu trennen sein werden. Daß überhaupt Paritätsverletzung auftritt und diese recht gut im Rahmen des Weinberg-Salam-Modells beschrieben werden kann, haben neueste Experimente von Prescott mit polarisierten Elektronen an Protonen und Deuterium gezeigt. [VI.5.1].

Hat man $M_L > M_Z$, eine Situation, die man eigentlich erwartet, so wird eine Abweichung vom Standard-Modell erst bei noch höheren Energien auftreten - in Übereinstimmung mit dem sogenannten "decoupling theorem" [VI.5.2], nach dem massive Teilchen unterhalb ihrer Schwellen praktisch entkoppeln.

So hat man trotz eines gewissen Unbehages wegen des "Pseudoveichcharakters" (Lokalität !) der zusätzlichen U(1) Wechselwirkung kein Problem, eine entsprechende Theorie mit heutigen Messungen in Einklang zu bringen. Auf die großen konzeptionellen Vereinfachungen, die das Gelingen eines solchen Programmes bezüglich der fundamental benötigten Symmetrien erzielen würde, kann nicht eindringlich genug hingewiesen werden.

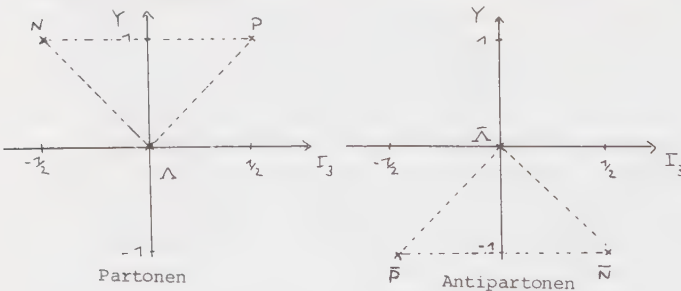
Anhang A1

Quark Modelle

Einer der ersten Versuche, sich die Hadronen aus Konstituenten aufgebaut zu denken, wurde von Sakata [A1.1] unternommen. Trotz des experimentellen Fehlschlags dieses Modelles soll es hier angegeben werden, um als Vergleichsmodell mit ganzzahligen Quantenzahlen zu dienen. Außer diesem Modell werden hier noch das Gell-Mann-Zweig-Modell [A1.2] und das Han-Nambu Modell [A1.3] und ihre Verallgemeinerungen auf $SU(N)$ wegen ihrer Bedeutung für die Beschreibung der Experimente aufgeführt.

(a) Sakata Modell [A1.1]

In diesem Modell tragen die Partonen die Quantenzahlen von Proton, Neutron und Lambda



Die Quantenzahlen lauten

	Isospin I	I_3	Baryonzahl B	Hyperladung Y	Strangeness S	Ladung Q
P	1/2	1/2	1	1	0	1
N	1/2	- 1/2	1	1	0	0
Λ	0	0	1	0	- 1	0

Die Formel für die Ladung lautet

$$Q = 1/2 (B + S) + I_3 = 1/2 Y + I_3$$

(b) Verallgemeinerung auf $SU(4)$ ($SU(N)$) [A.1.4]

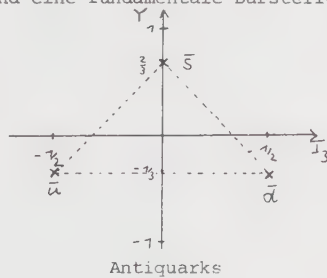
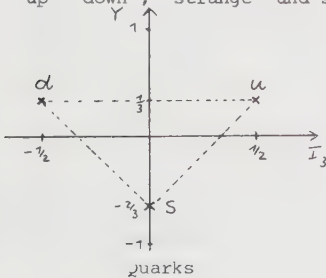
<u>Quantenzahlen</u>								
	I	I_3	B	Y	S	C		Q
P	1/2	1/2	1	1	0	0	0	1
N	1/2	- 1/2	1	1	0	0	0	0
Λ	0	0	1	0	- 1	0	0	0
C	0	0	1	0	0	1	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
.	0	0	1	0	0	0	+ 1	1,0

Ladungsformel

$$Q = 1/2 (B + S + C + \dots) + I_3 = 1/2 (Y + C + \dots) + I_3$$

(c) Gell-Mann-Zweig-Modell [A1.2]

Die Partonen, auch Quarks genannt, tragen die Bezeichnung u,d,s für "up" "down", "strange" und sind eine fundamentale Darstellung der $SU(3)$



Quantenzahlen

	I	I_3	B	Y	S	Q
u	1/2	1/2	1/3	1/3	0	2/3
d	1/2	- 1/2	1/3	1/3	0	- 1/3
s	0	0	1/3	- 2/3	- 1	- 1/3

Ladungsformel

$$Q = 1/2 (B + S) + I_3 = 1/2 Y + I_3$$

(d) Verallgemeinerung auf SU(4) [A1.4] bzw. SU(N)

	I	I_3	B	Y	S	C		Q
SU(4)	u	1/2	1/2	1/3	1/3	0	0 .	2/3
	d	1/2	-1/2	1/3	1/3	0	0 .	-1/3
	s	0	0	1/3	-2/3	-1	0 .	-1/3
	c	0	0	1/3	1/3	0	1 .	2/3
SU(N)	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	0	0	1/3	1/3	0	0 <u>+1</u>	2/3, 1/3
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.

Ladungsformel

$$Q = 1/2 (B + S + C + \dots) + I_3 = 1/2 (Y + C + \dots) + I_3$$

(e) Color für Modelle mit gebrochener Ladungszahl [A1.5]

Auf Grund des Spin-Statistikproblems für die Wellenfunktionen der Baryonen wurde als zusätzlicher Freiheitsgrad eine weitere innere SU(3), genannt Color, eingeführt. Das bedeutet eine Verdreifachung der Anzahl der Quarks. Dabei wird angenommen, daß die übrigen Quantenzahlen unabhängig vom Colorindex 1,2,3 sind. In der sogenannten QCD wird der Colorfreiheitsgrad geeicht und die dazugehörigen Eichteilchen, Gluonen genannt, sollen die starke Wechselwirkung vermitteln.

(f) Han-Nambu-Modell [A1.3]

Hier hat man von Anfang an neben der sogenannten Flavorgruppe (u,d,s) eine Color-Symmetrie (1,2,3). Im Gegensatz zu (e) hängen dagegen hier die Flavorquantenzahlen von den Colorquantenzahlen ab.

	I	I_3	B	Y	S	$\tilde{C}(\text{Color})$	Q
P_1	1/2	1/2	1	1	0	0	1
P_2	1/2	1/2	0	0	0	1	1
P_3	1/2	1/2	0	0	0	- 1	0
n_1	1/2	- 1/2	1	1	0	0	0
n_2	1/2	- 1/2	0	0	0	1	0
n_3	1/2	- 1/2	0	0	0	- 1	- 1
s_1	0	0	1	0	- 1	0	0
s_2	0	0	0	- 1	- 1	1	0
s_3	0	0	0	- 1	- 1	- 1	- 1

Die Color-Quantenzahl $\tilde{C}$ trägt hier zur Ladung bei

$$Q = 1/2 (B + S + \tilde{C}) + I_3 = 1/2 (Y + \tilde{C}) + I_3$$

(g) Verallgemeinerung auf $SU(4)$ bzw. $SU(N)$

Entsprechende Verallgemeinerungen auf $SU(N)_f \times SU(3)_C$ dürften nach den vorhergegangenen Beispielen leicht fallen. Zu erwähnen sei hier vielleicht noch die von Pati und Salam vorgenommene Verallgemeinerung auf $SU(4)_S \times SU(4)_C$, wobei der vierte Colorindex für die Leptonen stehen soll.

Anhang A2

Renormierungsgruppe und Hochenergieverhalten [A.2.1]

Bei der Berechnung renormierter Größen aus einer unrenormierten Theorie tritt als neuer, frei wählbarer Parameter ein Normierungspunkt μ auf. Als Folge dieses zusätzlichen Freiheitsgrades erhält man eine Gleichung, die Renormierungsgruppengleichung, mit deren Hilfe es möglich ist, die Willkür in der Wahl von μ durch Umdefinitionen der Kopplungskonstanten und Massenparameter aufzufangen. Diese Gleichung gilt für renormierte, Einteilchen-irreduzible n-Punkt-Funktionen und hat die Form

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \beta_i(q_j, m_k, \mu) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i m_i \gamma_{m_i}(q_j, m_k, \mu) \frac{\partial}{\partial m_i} + \sum_i n_i \gamma_i(q_j, m_k, \mu) \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, q_j, m_k, \mu) = 0 \quad (A2.1)$$

Die β_i , γ_{m_i} und γ_i sind dimensionslose Größen. Sie sind charakteristisch für eine gegebene Theorie und hängen nicht von der speziellen n-Punkt-Funktion ab. Man kann sie entweder algebraisch aus den Normierungsbedingungen ermitteln, oder sie aus geeigneten Ableitungen der Renormierungskonstanten Z_ϕ, Z_ψ etc. bei endlichem "cut off" berechnen.

Die Renormierungsgruppengleichung ermöglicht Aussagen über das Verhalten von $\Gamma_R^{(n)}$, falls alle äußeren Impulse mit demselben Faktor multipliziert werden. Hat $\Gamma_R^{(n)}$ die Dimension D, so gilt

$$\Gamma_R^{(n)}(e^t p_i, q_j, m_k, \mu) = e^{Dt} \exp \left[\sum_k n_k \int_0^t \gamma_k(\tau) d\tau \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{q}_j(t), \bar{m}_k(t) e^{-t}, \mu) \quad (A2.2)$$

Dabei wurden "gleitende" Kopplungen $\bar{q}(t)$ und Massen $\bar{m}(t)$ eingeführt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}_j(\bar{q}_j(t), \bar{m}_k(t), \mu) &= \beta_i(\bar{q}_j(t), \bar{m}_k(t), \mu) \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_i(\bar{q}_j(t), \bar{m}_k(t), \mu) &= \gamma_{m_i}(\bar{q}_j(t), \bar{m}_k(t), \mu) \\ \gamma_i(t) &= \gamma_i(\bar{q}_j(t), \bar{m}_k(t), \mu) \end{aligned} \quad (A2.3)$$

Die Lösungen lauten

$$\int_{\bar{g}_i(t_0)}^{\bar{g}_i(t)} \frac{d\bar{g}_i}{\beta_i(\bar{g}_i(t), \bar{m}_k(t), \mu)} = t - t_0 \quad (A2.4)$$

$$\bar{m}_i(t) = m_{i0} \exp \left[\int_{t_0}^t \gamma_{m_i}(\tau) d\tau \right]$$

und werden sich wegen des nichtlinearen Charakters dieser Gleichungen nur in den einfachsten Fällen geschlossen angeben lassen.

Existiert nur ein Feld mit einer einzigen Kopplungskonstanten, so hat man bei Vernachlässigung von Massen

$$\int_{\bar{g}(t_0)}^{\bar{g}(t)} \frac{dx}{\beta(x)} = t - t_0 \quad (A2.5)$$

Für $t \rightarrow \infty$ wird also $g(t)$ entweder monoton anwachsen ($\beta(x) > 0$) oder monoton fallen ($\beta(x) < 0$), oder einem endlichen Wert g_c zustreben, falls $\beta(g_c) = 0$ (ultravioletter Fixpunkt). Existiert ein solcher Fixpunkt, so gilt

$$T_R^{(n)}(c^t \rho_i, g, m, \mu) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{[D+n\gamma(g_c)]t} \exp \left[n \int_0^t (\gamma(\bar{g}(\tau)) - \gamma(g_c)) d\tau \right] T_R^{(n)}(\rho_i, g_c, \bar{m}(g_c) e^{-t}, \mu) \quad (A2.6)$$

+ ...

Konvergiert $\gamma(g(t))$ schnell genug gegen $\gamma(g_c)$, so verhält sich $T_R^{(n)}$ im Limes, als ob es die Dimension $D+n\gamma(g_c)$ besitzt - daher auch der Name anomale Dimension für γ .

Ist $g_c = 0$, so spricht man von einer asymptotisch freien Theorie. Wegen $\gamma(g=0) = 0$ (in Störungstheorie) wird das Verhalten von $T_R^{(n)}$ in diesem Fall bis auf logarithmische Korrekturen dem einer freien Theorie gleichen.

Zur Illustration sollen hier die Verhältnisse für eine asymptotisch freie Theorie und eine Theorie mit endlichem Fixpunkt angegeben werden.

(a) asymptotisch freie Theorie (z.B. QCD)

$$\beta(g) = -a g^3 + \dots$$

$$\gamma(g) = b g^2 + \dots$$

(A2.7)

Für die gleitende Kopplung gilt

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g_0^2}{1 + 2\alpha g_0^2(t-t_0)} = \frac{g_0^2}{1 + \alpha g_0^2 \mathcal{L}_n(Q^2/Q_0^2)} = \frac{1}{\alpha \mathcal{L}_n(Q^2/\Lambda^2)} \quad (A2.8)$$

und die n-Punkt-Funktion lautet

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Gamma_R^{(n)}(p_i, 0, \mu) e^{D(t-t_0)} \left[\frac{\bar{g}^2(t)}{\bar{g}^2(t_0)} \right]^{-b/2\alpha} + \dots \\ &= \Gamma_R^{(n)}(p_i, 0, \mu) \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{D/2} \left[\frac{\mathcal{L}_n(Q^2/\Lambda^2)}{\mathcal{L}_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-b/2\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (A2.9)$$

(b) endlicher Fixpunkt g_c

$$\beta(g) = -\alpha(g - g_c) + \dots \quad \alpha > 0 \quad (A2.10)$$

Die gleitende Kopplung hat die Form

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= g_c + (g_0 - g_c) e^{-\alpha(t-t_0)} \\ &= g_c + (g_0 - g_c) \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{-\alpha/2} \\ &= g_c + \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-\alpha/2} \end{aligned} \quad (A2.11)$$

und die Impulsabhängigkeit der n-Punkt-Funktion lautet

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_c, \mu) e^{[D + n\gamma(g_c)](t-t_0)} + \dots \\ &= \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_c, \mu) \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{[D + n\gamma(g_c)]/2} + \dots \end{aligned} \quad (A2.12)$$

Anhang A3

Fixpunktheorien und anomale Dimensionen

A) Asymptotisch freie Theorie (QCD)

Die Fermionen sind eine fundamentale Darstellung der $SU(N_f) \times SU(N_c)$ bezüglich der inneren Flavor- und Colorquantenzahlen. Die Colorgruppe ist geeicht und die Fermionen sind minimal an die Coloreichfelder gekoppelt:

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\sigma}{2} \psi : \bar{A}^\mu.$$

Es werden folgende Bezeichnungen verwandt

$$\begin{aligned} [\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}] &= i f^{abc} \frac{\sigma}{2} & \text{für } SU(N_f) \times SU(N_c) \text{ gilt} \\ C_2(G) \delta^{ab} &= \sum_{c,d} f^{acd} f^{bcd} & C_2(G) = N_c \\ C_2(R) 1_{ij} &= \sum_a (\frac{\sigma}{2} \frac{\sigma}{2})_{ij} & C_2(R) = \frac{N_c^2 - 1}{2 N_c} \\ T(R) \delta^{ab} &= T(R) (\frac{\sigma}{2} \frac{\sigma}{2}) & T(R) = \frac{1}{2} N_f \end{aligned} \quad (A3.1)$$

Die β -Funktion in der 1-Loop-Näherung lautet [A3.1]

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} b_0 = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R) \right] = -\frac{g^3}{48\pi^2} [11 N_c - 2 N_f] \quad (A3.2)$$

so daß die Theorie für $N_c = 3$ asymptotisch frei ist ($\beta < 0$), falls $N_f \leq 16$ gilt (die Probleme mit den Higgsfeldern sollen ignoriert werden). Die gleitende Kopplungskonstante lautet

$$\bar{g}^2(Q^2) = \frac{16 \pi^2}{[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R)] \ell_n(Q^2/\Lambda^2)} = \frac{48 \pi^2}{(11 N_c - 2 N_f) \ell_n(Q^2/\Lambda^2)} \quad (A3.3)$$

In der 1-Loop-Näherung haben die anomalen Dimensionen der Fermionen (q von Quarks) und der Eichfelder (G von Gluonen) folgende Form [A3.1]

$$\begin{aligned}
 \gamma_{qq}^{(n)} &= \frac{g^2}{8\pi^2} C_2(R) \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] \\
 \gamma_{GG}^{(n)} &= \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ C_2(R) \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{n(n+1)} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] + \frac{4}{3} T(R) \right\} \\
 \gamma_{GG}^{(n)} &= -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{4(n^2+n+2)}{n(n+1)(n+2)} T(R) \\
 \gamma_{qq}^{(n)} &= -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{2(n^2+n+2)}{n(n^2-1)} C_2(R)
 \end{aligned} \tag{A3.4}$$

Für Nichtsingletts (NS) wird die Impulsabhängigkeit der Momente durch

$$\gamma_{NS}^{(n)} = \frac{g^2}{g^2} \gamma_{qq}^{(n)} \tag{A3.5}$$

gegeben, während für Singletts

$$\gamma_{\pm}^{(n)} = \frac{g^2}{g^2} \left[\gamma_{qq}^{(n)} + \gamma_{GG}^{(n)} \pm \sqrt{(\gamma_{qq}^{(n)} + \gamma_{GG}^{(n)})^2 + 4 \gamma_{GG}^{(n)} \gamma_{qq}^{(n)}} \right] \tag{A3.6}$$

auftritt. Diese Größe ergibt sich aus den Eigenwerten der Matrix der anomalen Dimensionen

$$\underline{\gamma}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_{qq}^{(n)} & \gamma_{qg}^{(n)} \\ \gamma_{gq}^{(n)} & \gamma_{GG}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Man hat allgemein

$$\begin{aligned}
 M_n(Q^2) &= M_n^{NS}(Q_0^2) \left[\frac{\ell_n(Q^2/\Lambda^2)}{\ell_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-a_{NS}^{(n)}} \\
 &+ M_n^+(Q_0^2) \left[\frac{\ell_n(Q^2/\Lambda^2)}{\ell_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-a_+^{(n)}} \\
 &+ M_n^-(Q_0^2) \left[\frac{\ell_n(Q^2/\Lambda^2)}{\ell_n(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{-a_-^{(n)}}
 \end{aligned} \tag{A3.7}$$

$$a_{NS}^{(n)} = \gamma_{NS}^{(n)} / 2b_0 \quad a_{\pm}^{(n)} = \gamma_{\pm}^{(n)} / 2b_0$$

Wegen b_0 siehe (A3.2).

Der Impulsanteil der Fermionen für $Q^2 \rightarrow \infty$ am Gesamtimpuls beträgt

$$r = \frac{T(R)}{2C_2(R) + T(R)} = \frac{N_c N_f}{2N_c^2 + N_c N_f - 2} = \begin{cases} \frac{9}{25} = .36 & \text{für } SU(3_f) \times SU(3_c) \\ \frac{3}{7} = .43 & \text{für } SU(4_f) \times SU(3_c) \end{cases} \tag{A3.8}$$

B) Theorien mit endlichem Fixpunkt g_c

Allgemein erwartet man in Theorien mit endlichem Fixpunkt g_c ein Potenzverhalten für die Impulsabhängigkeit der Momente

$$M_n(Q^2) = M_n(Q_0^2) \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{-\frac{1}{2} \gamma^{(n)}(g_c)} + \dots \quad (A3.9)$$

Für weitergehende Aussagen muß $\gamma^{(n)}(g_c)$ bekannt sein. Mit großen Vorbehalten kann angenommen werden, daß $\gamma^{(n)}(g) = \sum_K C_K^{(n)} (g^2)^K$ am Fixpunkt gegeben ist durch

$$\gamma^{(n)}(g_c) \approx C_1^{(n)} g_c^2 \quad (A3.10)$$

[A3.2], also durch die 1-Loop-Näherung bestimmt wird.

Für abelsche Vektorgluonen gilt dann entsprechend (A3.4), (A3.5) und (A3.6) für die anomalen Dimensionen und (A3.8) für den Energiebruchteil der Fermionen. Man hat allerdings

$$C_2(G) = 0 \quad C_2(R) = 1 \quad T(R) = N_f \quad (A3.11)$$

zu setzen.

Für skalare Gluonen gilt [A3.3]

$$\begin{aligned} \gamma_{qq}^{(n)} &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(R) \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] \\ \gamma_{GG}^{(n)} &= \frac{g^2}{4\pi^2} T(R) \\ \gamma_{GG}^{(n)} &= -\frac{g^2}{2\pi^2} T(R) \frac{1}{n} \\ \gamma_{qq}^{(n)} &= -\frac{g^2}{8\pi^2} C_2(R) \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (A3.12)$$

Für $C_2(R)$ und $T(R)$ hat man je nach nichtabelscher oder abelscher Eichgruppe entweder (A3.1) oder (A3.11) zu verwenden. Der Impulsanteil, der asymptotisch von Fermionen getragen wird, beträgt

$$r = \frac{6T(R)}{6T(R) + C_2(R)} = \frac{6N_f N_c}{N_c^2 + 6N_c N_f - 1} = \begin{cases} 27/31 = .87 & SU(3_f) \times SU(3_c) \\ 9/10 = .90 & SU(4_f) \times SU(3_c) \end{cases} \quad (A3.13)$$

Nachzutragen ist noch r für Vektor - bzw. skalare Gluonen im Falle einer abelschen Eichtheorie

$$r = \begin{cases} \frac{T(R)}{2C_2(R) + T(R)} = \frac{N_f}{2 + N_f} = \begin{cases} .6 & SU(3_f) \\ .67 & SU(4_f) \end{cases} & \text{Vektorgluonen} \\ \frac{6T(R)}{6T(R) + C_2(R)} = \frac{6N_f}{6N_f + 1} = \begin{cases} .95 & SU(3_f) \\ .96 & SU(4_f) \end{cases} & \text{skalare Gluonen} \end{cases} \quad (A3.14)$$

Literaturverzeichnis

- [I.1] M. Gell-Mann, Phys.Lett. 8 (1964) 214;
G. Zweig, unveröffentlicht.
- [I.2] R. Taylor, Proceedings of the 4th International Symposium on
Electron and Photon Interactions at High Energy 1979, ed. D.W.
Braben, Daresbury Nucl.Phys. Laboratory, U.K.
- [I.3] R.P. Feynman, Phys.Rev.Lett. 23 (1969) 1415;
J.D. Bjorken and E.A. Paschos, Phys.Rev. 158 (1969) 1975;
S.D. Drell, Proc. 1969 Int. Summer School of Physics "Ettore
Majorana" (Academic Press, New York 1970).
- [I.4] H. Fritsch and M. Gell-Mann, 16th Internat. Conf. on High Energy
Physics, Chicago-Batavia 1972 (1972), Vol. 2, p. 135;
H. Fritsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys.Lett. 47B (1973) 365;
S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 494; Phys.Rev. D8 (1973) 4482;
D.J. Groß and F. Wilczek, Phys.Rev. 8 (1973) 3633.
- [I.5] M.Y. Han und Y. Nambu, Phys.Rev. 139B (1965) 1006.
- [I.6] J.C. Pati in "Gauge Theories and Modern Field Theory", Proceedings
of a Conference held at Northeastern University, Boston 1975
(MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England);
A. Salam, Proc.Roy.Soc. London, A 355 (1977) 515.
- [I.7] R.L. Jaffe, Phys.Lett. 37B (1971) 517;
R.L. Jaffe, Phys.Rev. D5 (1972) 2622;
R.L. Jaffe, Phys.Rev. D6 (1972) 716;
J.C. Polkinghorne, Nuovo Cimento 8A (1972) 572.
- [I.8] S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 1264;
A. Salam, Proceedings of the 8th Nobel Symposium, Stockholm 1968.
- [I.9] H.P. Dürr and H. Saller, Phys.Lett. 84B (1979) 336.

- [II.1.1] J. Ellis and R.J. Jaffe, U.C. Santa Cruz Lect., SLAC-PUB 1353 (1973);
C.H. Llewellyn Smith, Phys.Rep. 3C (1972) 261;
J. Ellis in "Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy", Les Houches, Session XXIX 1976 (North-Holland Publ.Co. 1977).
- [II.1.2] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistische Quantenmechanik", BI Hochschultaschenbücher, Band 98/98a;
Bogoliubov and Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields", Wiley-Interscience.
- [II.1.3] W.C. Barber, G.K. O'Neill, B. Gittelmann and B. Richter, Phys.Rev. D3 (1971) 2796;
R. Turlay in "Int.Conf. on High Energy Phys.", GENEVA 1979.
- [II.1.4] S. Weinberg, Phys.Rev. Lett. 19 (1967) 1264;
A. Salam in "Proceedings of the 8th Nobel Symposium", Stockholm 1968.
- [II.1.5] B.C. Barish et al., Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 565;
F. Sculli in "Proc. of the XVII Int. Conf. on High Energy Phys.", London 1974.
- [II.1.6] C.H. Llewellyn Smith, Phys.Rev. 3C (1972) 261.
- [II.1.7] H. Fritzsche in "Proc. of the Int. Neutrino Conf.", Aachen 1976.
- [II.1.8] A. Benvenuti et al., Phys.Rev.Lett. 34 (1975) 597.
- [II.1.9] M. Holder et al., Phys.Rev. Lett. 39 (1977) 433;
J. Steinberger in "Hadron Struct. and Lepton-Hadron Int.", Cargèse 1977.
- [II.1.10] Y. Nambu in "Preludes in Theor.Phys.", Amsterdam 1966;
H. Fritzsche and M. Gell-Mann in "16th Int.Conf. on High Energy Phys"., Chicago-Batavia 1972 (1972), Vol. 2, p. 135;
H. Fritzsche, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys.Lett. 47B (1973) 365.
S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 494; Phys.Rev. D8 (1973) 4482;
D.J. Groß and F. Wilzcek, Phys.Rev. 8 (1973) 3633.

- [II.1.11] K.G. Wilson, Phys.Rev. D10 (1974) 2445;
J. Kogut and L. Susskind, Phys.Rev. D11 (1975) 395;
siehe auch W. Marciano and H. Pagels, Phys.Rep. 36C (1978) 137.
- [II.1.12] S.L. Adler in "Lectures in Elem. Particles and Quant. Field Theory", 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Phys. Vol. 1 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England).
- [II.1.13] Steinberger in "Proc. of the Lund Internat. Conf. on Elementary Particle Physics", Lund, Sweden, 1969.
- [II.1.14] L.N. Hand, Phys.Rep. 129 (1963) 1834.
- [II.1.15] J. Ellis and R.L. Jaffe, U.C. Santa Cruz Lect., SLAC-PUB 1353 (1973).
- [II.1.16] J. Ellis and R.L. Jaffe, U.C. Santa Cruz Lect., SLAC-PUB 1353 (1973).
- [II.1.17] R.P. Feynmann and M. Gell-Mann, Phys.Rep. 109 (1958) 193.
- [II.1.18] J.D. Bjorken, Phys.Rev. 179 (1969) 1547.
- [II.2.1] R.P. Feynmann, Phys.Rev.Lett. 23 (1969) 1415;
J.D. Bjorken and E.A. Paschos, Phys.Rev. 158 (1969) 1975.
R.P. Feynmann, Photon Hadron Interaction, Benjamin, N.Y. 1972.
- [II.2.2] S.D. Drell, D.J. Levy, T.-M. Yan, Phys.Rev. D1 (1970) 1035;
S.D. Drell, T.-M. Yan, Ann. of Phys. 66 (1971) 555;
S.D. Drell, Proc.1969 Int. Summer School of Phys. "Ettore Majorana" (Academic Press, N.Y. 1970).
- [II.2.3] M.A. Furman and C.J. Komen, Nucl.Phys. B84 (1975) 323.
- [II.2.4] J.C. Pati in "Gauge Theories and Modern Field Theory",
Proceedings of a Conference held at Northeastern University,
Boston 1975, (MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London,
England) und darin enthaltene Referenzen;
A. Salam, F.R.S., Proc.Royal Soc. London, A355 (1977) 515.
- [II.2.5] R.P. Feynmann and M. Gell-Mann, Phys.Rev. 109 (1958) 193.

- [II.2.6] C.G. Callan and D.J. Gross, Phys.Rev.Lett. 22 (1969) 156;
D.J. Gross and C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.2.7] C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B17 (1970) 277.
- [II.2.8] D.J. Gross and C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.2.9] J.D. Bjorken, Phys.Rev. 163 (1967) 1767.
- [II.2.10] S.L. Adler, Phys.Rev. 143 (1965) 1144.
- [II.3.1] J.D. Bjorken, Phys.Rev. 148 (1966) 1467;
K.Johnson and F.E. Low, Prog.Theor.Phys.Supp. 37-38 (1966) 74.
S.L. Adler in: "Lectures on Elementary Particle and Quantum
Field Theory", 1970 Brandeis University Summer Institute in
Theor. Phys., Vol. 1 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts,
London, England);
J. Ellis and R.J. Jaffe, U.C. Santa Cruz Lect. SLAC-PUB 1353 (1973).
- [II.3.2] T.D. Lee, S. Weinberg and B. Zumino, Phys.Rev.Lett. 18 (1967)
1029.
- [II.3.3] J.M. Cornwall and R.E. Norton, Phys.Rev. 177 (1969) 2584;
J.D. Bjorken, Phys.Rev. 179 (1969) 1547.
- [II.3.4] J.M. Cornwall and R.E. Norton, Phys.Rev. 177 (1969) 2584.
- [II.3.5] S.L. Adler in "Lectures on Elementary Particle and Quantum
Field Theory", 1970 Brandeis University Summer Institute in
Theor.Phys., Vol. 1 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts,
London, England).
- [II.3.6] J. Schwinger, Phys.Rev.Lett. 3 (1959) 296.
- [II.3.7] R. Jackiw and G. Preparata, Phys.Rev.Lett. 22 (1969) 975;
S.L. Adler and W.K. Tung, Phys.Rev.Lett. 22 (1969) 978;
S.L. Adler in "Lectures on Elementary Particle and Quantum Field
Field Theory", 1970 Brandeis University Summer Institute in
Theoretical Physics, Vol. 1 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts,
London, England).
- [II.3.8] C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B17 (1970) 277.
- [II.3.9] J.D. Bjorken, Phys.Rev. 163 (1967) 1767.

- [II.3.10] D.J. Gross and C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.3.11] S.L. Adler, Phys.Rev. 143 (1965) 1144.
- [II.3.12] J.M. Cornwall and R. Jackiw, Phys.Rev. D4 (1971) 367.
- [II.3.13] C.G. Callan and D.J. Gross, Phys.Rev.Lett. 22 (1969) 156.
D.J. Gross and C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.3.14] C.H. Llewellyn Smith, Nucl. Phys. B14 (1969) 337.
- [II.3.15] C.H. Llewellyn Smith, Phys.Rev. D4 (1971) 2392.
- [II.3.16] C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B17 (1970) 277.
- [II.4.1] K.G. Wilson, Phys.Rev. 179 (1969) 1499.
- [II.4.2] J. Ellis in "Weak and electromagnetic interactions at high energy", Les Houches, Session XXIX, 1976 (North-Holland Publ. Co. 1977).
- [II.4.3] R.L. Jaffe, Phys.Lett. 37B (1971) 517;
R.L. Jaffe, Phys.Rev. D5 (1972) 2622;
R.L. Jaffe, Phys.Rev. D6 (1972) 716;
J.C. Polkinghorne, Nuovo Cimento 8A (1972) 572.
- [II.4.4] C.G. Callan and D.J. Gross, Phys.Rev.Lett. 22 (1969) 156;
D.J. Gross and C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.4.5] C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.4.6] S.L. Adler, Phys.Rev. 143 (1965) 1144.
- [II.4.7] J.D. Bjorken, Phys.Rev. 163 (1967) 1767.
- [II.4.8] D.J. Gross and C.H. Llewellyn Smith, Nucl.Phys. B14 (1969) 337.
- [II.5.1] J.D. Bjorken, Phys.Rev. 179 (1969) 1547;
C.H. Llewellyn Smith, Phys.Rev. D4 (1971) 2392;
H.D. Politzer, Phys.Rep. 14c (1974) 129;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. D8 (1973) 3633; D9 (1974) 980;
H. Georgi and H.D. Politzer, Phys.Rev. D9 (1974) 416;
N. Christ, B. Hasslacher and A.H. Müller, Phys.Rev. D6 (1972) 3543.
- [II.5.2] K.G. Wilson, Phys.Rev. 179 (1969) 1499.

- [II.5.3] J.M. Cornwall and R.E. Norton, Phys.Rev. 177 (1969) 2584.
- [II.5.4] O. Nachtmann, Nucl. Phys. B63 (1973) 237;
O. Nachtmann, Nucl. Phys. B78 (1974) 455.
- [II.5.5] H.D. Politzer, Phys.Rev.Lett. 30 (1973) 1346 und Phys. Reports 14 (1974) 129;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev.Lett. 30 (1973) 1323;
Phys.Rev. D8 (1973) 3633 und Phys.Rev. D9 (1974) 980.
- [II.5.6] O. Nachtmann, Nucl.Phys. B78 (1974) 455.
- [II.5.7] R. Turlay in "Internat. Conf. on High Energy Physics", Geneva, 1979.
- [II.6.1] S. Coleman, in "Laws of hadronic matter", 1973 Internat. School of Subnuclear Physics, Erice, Academic Press, New York and London 1975.
- [II.6.2] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. D9 (1974) 980.
- [II.6.3] G. Parisi, Phys.Lett. 43B (1973) 207; 50B (1974) 367;
D.J. Gross, Phys.Rev.Lett. 32 (1974) 1071.
- [II.6.4] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, 16th Intern. Conf. on High Energy Physics, Chicago-Batavia 1972 (1972) Vol. 2, 135;
H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys.Lett. 47B (1973) 365.
S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 494; Phys.Rev. D8 (1973) 4482;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. 8 (1973) 3633.
- [II.6.5] D.J. Gross, in "Methods in Field Theory", Les Houches, Session XXVIII, 1975, North Holland Publ.Co. 1976.
- [II.6.6] W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke and T. Muta, Phys.Rev. D18 (1978) 3998.
- [II.6.7] M. Glück and E. Reya, Preprint DESY 79/13, 1979;
E. Reya, Phys.Lett. 84B (1979) 445.
- [II.7.1] H. Deden et al., Nucl.Phys. B85 (1975) 269.

- [III.1.1] B.H. Wick and G. Wolf, Preprint DESY 78/23 and dazu enthaltene Referenzen.
- [III.1.2] Barber et al., Preprint MIT, Febr.-79, Report No. 101.
- [III.1.3] H. Salecker, Z.Phys. 160 (1960) 385;
K. Ringhofer and H. Salecker, Contrib. to the 1975 Stanford Conference.
- [III.2.1] N. Cabibbo, G. Parisi, M. Testa, Nuovo Cimento Lett. 4 (1970) 35.
- [II.2.2] M.A. Furmann and G.J. Komen, Nucl.Phys. B84 (1975) 323;
J.C. Pati, in "Gauge Theories and Modern Field Theory",
Proceedings of a Conference held at Northeastern University,
Boston 1975 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London,
England);
A. Salam, Proc.Roy.Soc. London A355 (1977) 515.
- [III.4.1] D.J. Gross in "Methods in Field Theory" in Les Houches,
Session XXVIII, 1975, North-Holland Publ. Company, 1976.
- [III.5.1] T. Appelquist, in "Weak and Electromagnetic Interactions at
High Energies", Cargèse 1975 Part A, Plenum Press, N.Y. and
London 1976.
- [III.5.2] S.L. Adler, Phys.Rev. D10 (1974) 3714.
- [III.5.3] A. De Rujula, H. Georgi, Phys.Rev. D13 (1976) 1296.
- [III.5.4] E.C. Poggio, H.R. Quinn and S. Weinberg, Phys.Rev. D13 (1976) 1958.
- [III.6.1] H. Terazawa, Phys.Rev. D11 (1975) 49.
- [III.6.2] R.J. Crewther, Phys.Rev.Lett. 28 (1972) 1499;
M.S. Channowitz and J. Ellis, Phys.Lett. 40B (1972) 397;
Phys.Rev. D7 (1973) 2490.
- [III.6.3] N. Kroll, T.D. Lee and B. Zumino, Phys.Rev. 157 (1967) 1376.
- [IV.1.1] R.L. Jaffe, Phys.Lett. 37B (1971) 517;
R.L. Jaffe, Phys.Rev. D5 (1972) 2622;
R.L. Jaffe, Phys.Rev. D6 (1972) 716;
J.C. Polkinghorne, Nuovo Cimento 8A (1972) 572.

- [IV.1.2] S.D. Drell and T.-M. Yan, Phys.Rev.Lett. 24 (1970) 855.
- [IV.2.1] J. Ellis, in "Weak and electromagnetic interactions at high energies", Les Houches, Session XXIX, 1976, North-Holland Publ. Company 1977.
- [V.1.1] H.L. Anderson et al., Phys.Rev.Lett. 40 (1978) 1061.
- [V.1.2] Gordon et al., Phys.Rev.Lett. 41 (1978) 615.
- [V.1.3] H.L. Anderson, Fermilab Pub 79/30-EXP
- [V.1.4] M.A. Furmann and C.J. Komen, Nucl.Phys. 84B (1975) 323;
J.C. Pati, in "Gauge Theories and Modern Field Theories",
Proceedings of a Conference held at Northeastern University,
Boston, 1975 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London,
England)
A. Salam, Proc.Royal Soc. London, A355 (1977) 515.
- [V.1.5] J.G.H. de Groot, Zeitschr. für Physik C, Particles and Fields 1
(1979) 143.
- [V.1.6] R.F. Schwitters et al., Phys.Rev.Lett. 35 (1975) 1230;
G. Hanson et al., Phys.Rev.Lett. 35 (1975) 1609.
- [V.1.7] F.M. Renard, Nuovo Cimento 64 (1969) 979;
G. Kramer, J.L. Uretsky and T.F. Walsh, Phys.Rev. D3 (1971) 719;
G. Kramer and T.F. Walsh, DESY Report 72/46 (1972) und
Zeitschr.Phys. 263 (1973) 316.
- [V.2.1] A. Aubert et al., Phys.Rev.Lett. 33 (1974) 984;
D. Cline, in "Proceedings of the Int.Conf. on High Energy
Physics" (1975), Palermo Sizilien.
- [V.2.2] J.G.H. de Groot, Zeitschr. für Phys. C, Particles and Fields 1,
1979) 143;
siehe auch: B.C. Barish et al., Phys.Rev.Lett. 39 (1977) 741;
B.C. Bosetti et al., Phys.Lett. 70B (1977) 273.
- [V.2.3] C.S. Wu in "Unification of Elementary Forces and Gauge Theories",
Int. Conf. on Parity Noncons., Weak Neutr. Currents and
Gauge Theories, Batavia, 1977.

- [V.2.4] R. Turlay, in "Intern. Conference on High Energy Physics",
Geneva 1979.
- [V.2.5] B. Kayser, G.T. Garvey, E. Fishbach and S.P. Rose, Phys.Lett. 52B
(1974) 385;
R.L. Kingsley, F. Wilczek and A. Zee, Phys.Rev. D10 (1974) 2216;
J.J. Sakurai, in "Proc. Int. Summer Institute in Theor. Phys.",
DESY Hamburg (1975);
- [V.2.6] R.Turlay, in "Int. Conference on High Energy Physics",
Geneva 1979.
- [V.2.7] H. Georgi and S.L. Glashow, Phys.Rev. D6 (1972) 429.
- [V.3.1] E.D. Bloom, in "Deep Hadronic Structure and The New Particles",
Proc. of Summer Institute on Particle Physics, 1975, SLAC Report
No. 191, 1975.
- [V.3.2] H. Kühnelt and O. Nachtmann, Nucl. Phys. 88B (1975) 41.
- [V.3.3] H.J. Lipkin, Nucl.Phys. B155 (1979) 104.
- [V.3.4] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys.Rev. D11(1975) 2856.
- [V.3.5] J.C. Pati, in "Gauge Theories and Modern Field Theory",
Proceedings of a Conference held at Northeastern University,
Boston 1975 (MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London,
England);
A. Salam, Proc.Roy. Soc. London, A355 (1977) 515.
- [V.3.6] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, 16th Intern. Conf. on High Energy
Physics, Chicago-Batavia 1972 (1972) Vol. 2, 135.
H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys.Lett. 47B
(1973) 365;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. D8 (1973) 4482.
- [V.3.7] J.G.H. de Groot, Zeitschr. für Physik C, Particles and Fields 1,
(1979) 143.
- [V.3.8] S.L. Adler and R.F. Dashen, Current algebras and applications to
particle physics (Benjamin, Reading, 1968);
B. Renner, J. Iliopoulos and P. Meyer, Phys.Lett. 38B (1972) 519.

- [V.3.9] S.L. Adler, Lectures on elementary particles and quantum field theory, 1970, Brandeis Summer Institute, ed. S. Deser, M. Grisarn and H. Pendleton (MIT Press, Cambridge, 1971);
R. Jackiw, Lectures in current algebra and its applications, S.B. Treimann, R. Jackiw and D.J. Gross (Princeton University Press, New Jersey 1972).
- [V.3.10] M.S. Chanowitz, Color Symmetry and Quark confinement, 12th rencontre de Moriond, 1977, Vol. 3.
- [V.3.12] B.H. Wick and G. Wolf, Preprint DESY 78/23, 1978.
- [V.3.12] A. De Rujula and H. Georgi, Phys.Rev. D13 (1975) 1296;
E.C. Poggio, H.R. Quinn and S. Weinberg, Phys.Rev. D13 (1975) 1958.
- [V.3.13] A.I. Sanda, Phys.Rev.Lett. 42 (1979) 1660.
- [V.4.1] M. Gell-Mann, Phys.Lett. 8 (1964) 214;
G. Zweig, unveröffentlicht.
- [V.4.2] D.W. Greenberg, Phys.Rev.Lett. 13 (1964) 598.
- [V.4.3] M. Han and Y. Nambu, Phys.Rev. B139 (1965) 1006;
O.W. Greenberg, Phys.Rev.Lett. 13 (1969) 598;
W.A. Bardeen, H. Fritzsch and M. Gell-Mann, in "Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics", John Wiley and Sons, New York 1973.
- [V.4.4] S.L. Adler and R.F. Dashen, Current algebras and applications to particle physics (Benjamin, Reading, 1968);
B. Renner, J. Iliopoulos and P. Meyer, Phys.Lett. 38B (1972) 519.
- [V.4.5] S.L. Adler, Lectures on elementary particles and quantum field theory, 1970, Brandeis Summer Institute, ed. S. Deser, M. Grisan and H. Pendleton (MIT Press, Cambridge, 1971).
- [V.4.6] W. Marciano and H. Pagels, Phys.Reports 36C (1978) 137.
- [V.4.7] E. Reya, Phys.Lett. 84B (1979) 445.
- [V.5.1] H. Georgi and H.D. Politzer, Phys.Rev.Lett. 36 (1976) 1281;
Erratum Phys.Rev. Lett. 37 (1976) 68; Phys. Rev. D14 (1976) 1829;
R. Barbieri, J. Ellis, M.K. Gaillard and G.G. Ross, Phys.Lett. 64B (1976) 171.

- [V.5.2] Close, in "19th Int.Conf. on High Energy Physics", Tokyo 1978
(Int. Academic Printing Co., Ltd., Japan, 1979).
- [V.5.3] P. Castorina, G. Nardulli, G. Preparata, Preprint
Ref. TH. 2670-CERN, 1979.
- [V.5.4] G. Preparata, Phys. Rev.D7 (1973) 2973.
- [V.5.5] E. Reya, Phys.Lett. 84B (1979) 445.
- [V.5.6] E. Reya, in "Herbstschule für Hochenergiephysik", Maria-Laach 1978.
- [V.5.7] E. Reya, Preprint DESY 79/02, 1979;
E. Reya, Phys.Lett. 84B (1979) 445.
- [V.5.8] H. Harari, Preprint SLAC-PUB-2254 (T/E), 1979.
- [V.5.9] W.G. Scott, Preprint CERN/EP/PHYS 78-30.
- [V.5.10] S. Wolfram, Preprint CALT 68-690;
W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke and T. Muta,
Phys.Rev. D18 (1978) 3998.
- [V.5.11] O. Nachtmann, Nucl.Phys. 63B (1973) 237;
D.J. Gross, in "Methods in field theory", Les Houches, 1975
(North Holland Publ. Company, 1976).
- [V.5.12] D.J. Gross in "Methods in Field Theory", Les Houches,
Session XXVIII, 1975 (North-Holland Publ. Company, 1976).
- [V.6.1] W. Marciano and H. Pagels, Phys.Rep. 36C (1978) 138.
- [V.6.2] H.P. Dürr and H. Saller, Preprint MPI-PAE/PTH 23/79, June 1979.
- [V.6.3] V.A. Novikov, L.B. Okun, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein,
M.B. Voloshin and V.I. Zakharov, Phys.Rep. 41C (1978) 1.
- [VI.1.1] S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 1264;
A. Salam, Proceedings of the 8th Nobel Symposium, Stockholm, 1968.
- [VI.1.2] S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 29 (1972) 388;
J.C. Pati and A. Salam, Phys.Rev. D10 (1974) 275;
R.N. Mohapatra and J.C. Pati, Phys.Rev. D11 (1975) 566;
D11 (1975) 2558;
H. Fritzsch and P. Minkowski, Nucl.Phys. B103 (1976) 61.

- [VI.1.3] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, 16th Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago-Batavia 1972 (1972) Vol. 2, 135;
H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys.Lett. 47B (1973) 356;
S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 494; Phys.Rev. D8 (1973) 4482;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. 8 (1973) 3633.
- [VI.1.4] J. Ellis, preprint Ref. TH. 2723-CERN, August 1979.
- [VI.1.5] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys.Rev. D11 (1975) 2856.
- [VI.2.1] H.P. Dürr and H. Saller, Preprint MPI-PAE/PTh 17/78 (1978);
H.P. Dürr and H. Saller, Preprint MPI-PAE/PTh 23/79 (1979).
- [VI.2.2] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961) 15;
J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys.Rev. 127 (1962) 965.
- [VI.2.3] H.P. Dürr and H. Saller, Phys.Lett. 84B (1979) 336.
- [VI.5.1] Prescott, Phys.Lett. 84B (1979) 525.
- [VI.5.2] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys.Rev. D11 (1975) 2856.
- [A.1.1] S. Sakata, Prog.Theor.Phys. 16 (1956) 686.
- [A.1.2] M. Gell-Mann, Phys.Lett. 8 (1964) 214;
G. Zweig, unveröffentlicht.
- [A.2.3] M.Y. Han and Y. Nambu, Phys.Rev. 139B (1965) 1006.
- [A.1.4] siehe z.B.: A.W. Hendry and D.B. Lichtenberg, Rep. on Progr. in Phys. (GB) Vol. 41 (1978) 1707.
- [A.1.5] O.W. Greenberg, Phys.Rev.Lett. 13 (1969) 598;
W.A. Bardeen, H. Fritzsch and M. Gell-Mann, in "Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics", John Wiley and Sons, New York 1973.
- [A.2.1] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. D8 (1973) 3633; D9 (1974) 980;
H.Georgi and H.D. Politzer, Phys.Rev. D9 (1974) 416,
- [A.3.1] H. Georgi and H. D. Politzer, Phys.Rev. D9 (1974) 416;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. D8 (1973) 3633;
D.J. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev. D9 (1974) 980.

[A.3.2] E. Reya, Phys.Lett. 84B (1979) 445.

[A.3.3] N. Christ, B. Hasslacher and A.H. Mueller, Phys.Rev. D6
(1972) 3543.

NEW SLAC DATA ONLY

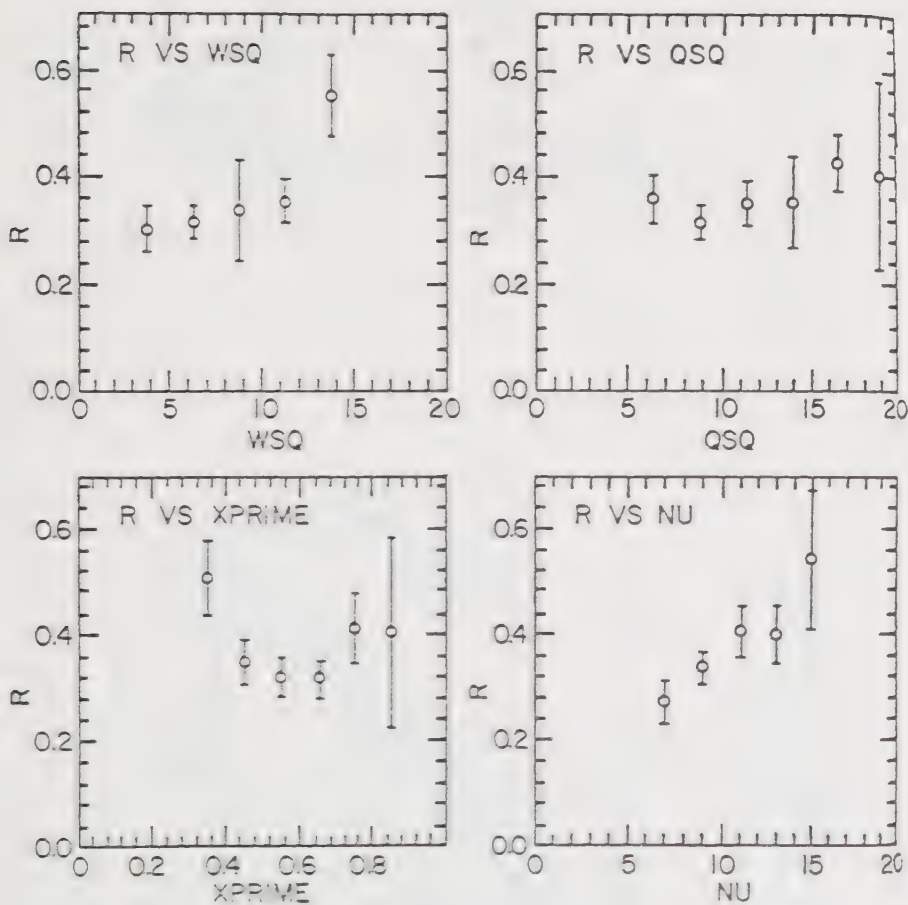
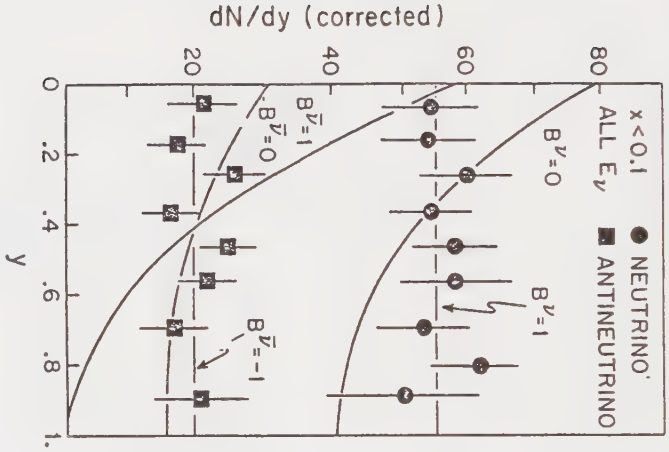


Figure [1]

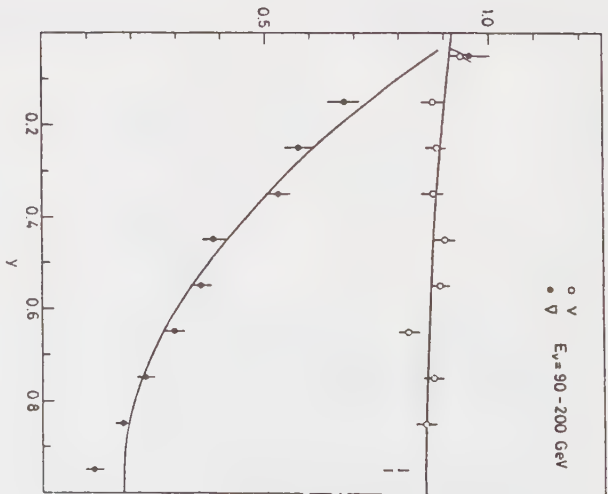
$$R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T}$$

$$\text{and } x = \frac{E_L}{2\nu - m_H^2}$$

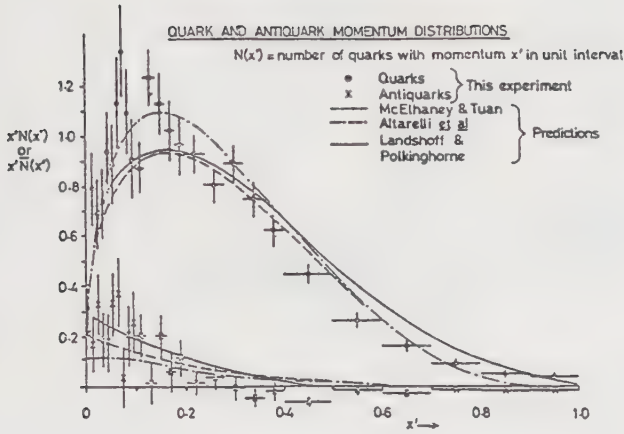
in Abhängigkeit von $W^2 = M_K^2$, Q^2 , ν



Figur [2]: y -Verteilung für Neutrino- und Antineutrino-Streuung, gemessen von der HPWF-Collaboration [V.2.1]

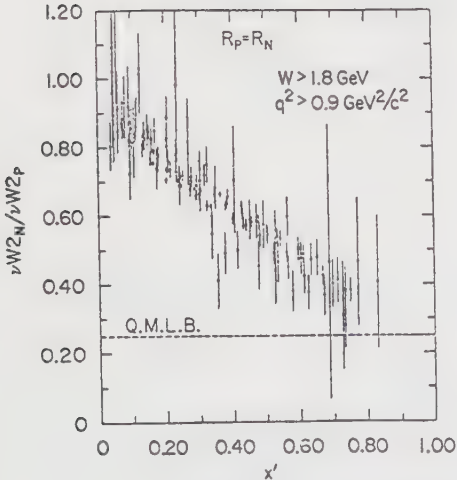


Figur [3]: y -Verteilung für Neutrino- und Antineutrino-Streuung, gemessen von der CDHS-Collaboration [V.2.2]

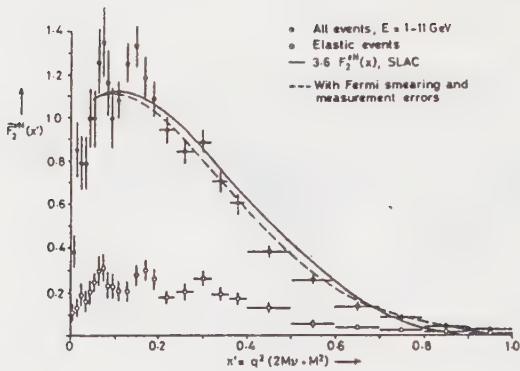


Figur [4]: $F_L(x)$ und $F_R(x)$ für die schwache Wechselwirkung

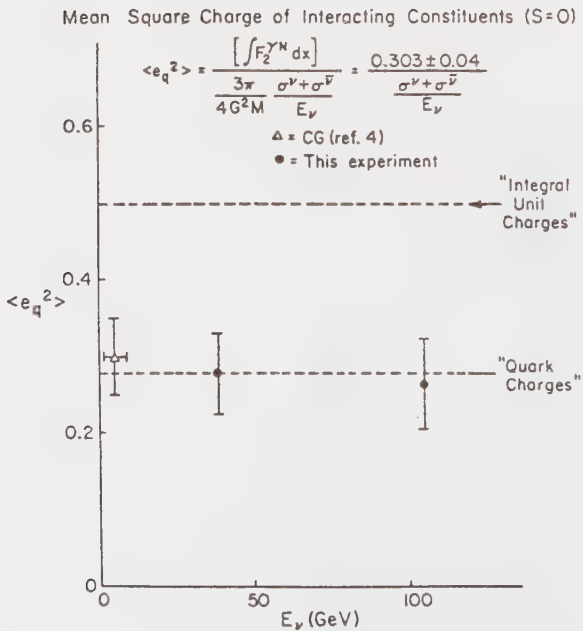
$$\left(F_L(x) = 2 \times \sum_i N_i(x) , F_R(x) = 2 \times \sum_i \bar{N}_i(x) \right)$$



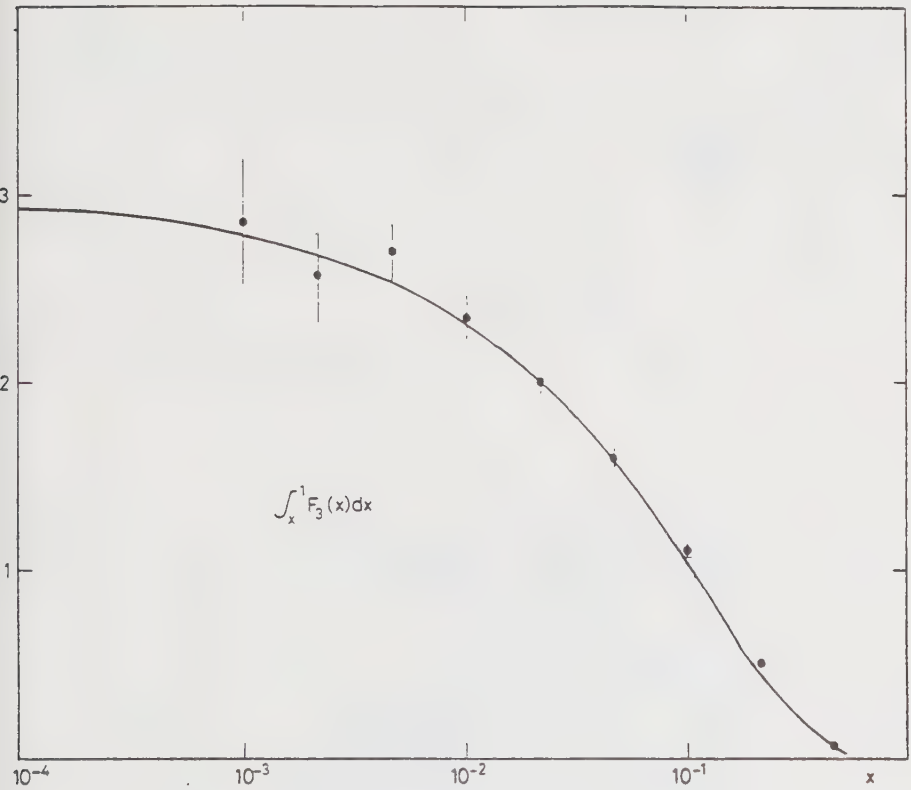
Figur [5]: Verhältnis der elektromagnetischen Strukturfunktionen
 von Neutronen und Protonen in Abhängigkeit von $x = \frac{Q^2}{2p \cdot q}$



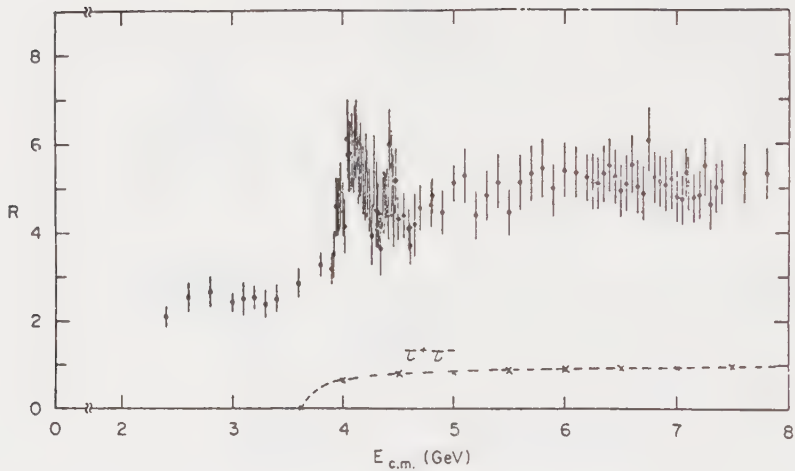
Figur [6]: Vergleich von $F_2^{\nu N}(x)$ und $\frac{18}{5} F_2^{eN}(x)$



Figur [7]: Verhältnis von $\int_0^1 dx F_2^{\nu N}(x)$ und $\int_0^1 dx F_2^{eN}(x)$

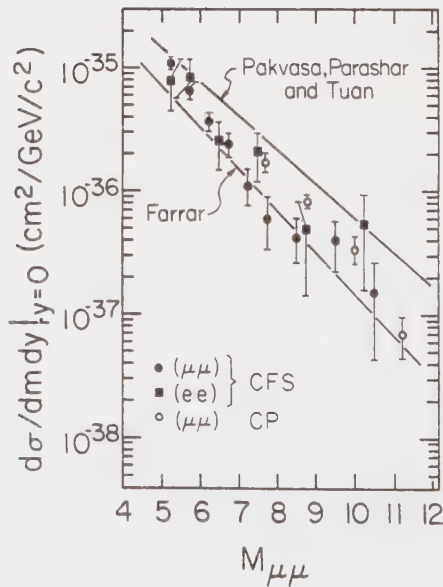


Figur [8]: Test der Gross-Llewellyn-Smith Summenregel $\frac{1}{2} \int dx [F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x)] = -3$

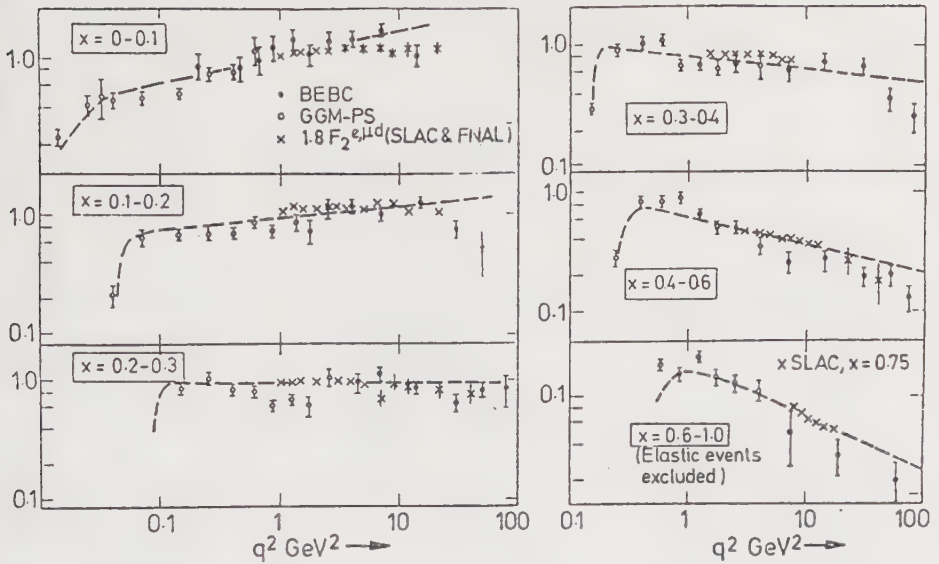


Figur [9] $R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$. Der Beitrag des schweren

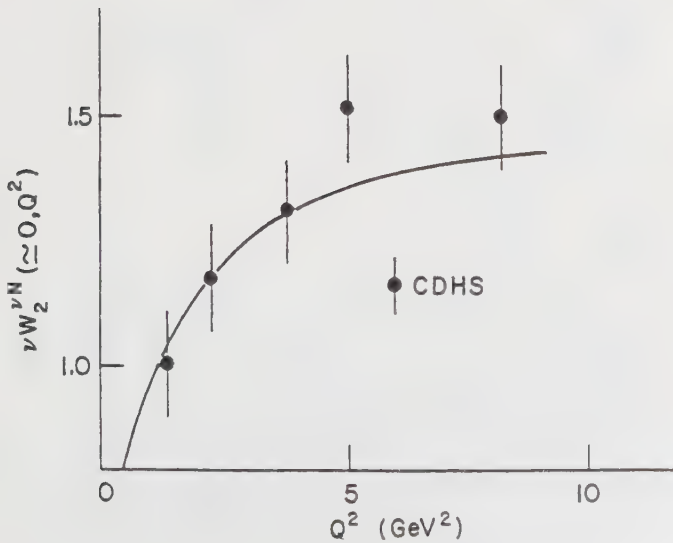
Leptons (.....) wurde nicht abgezogen.



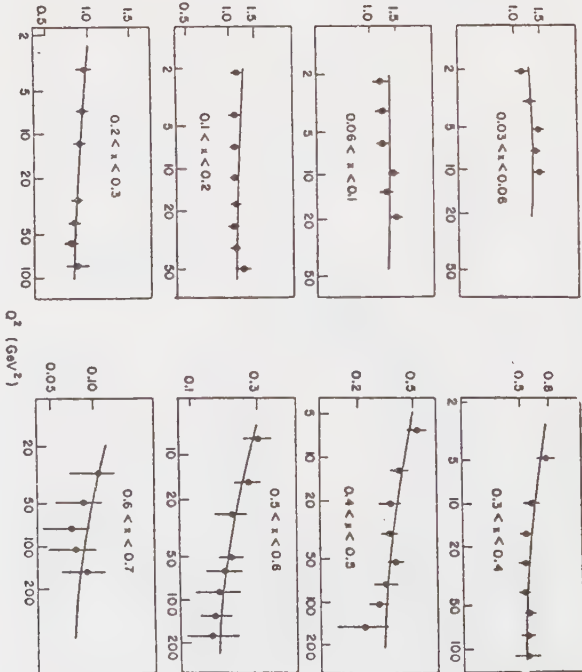
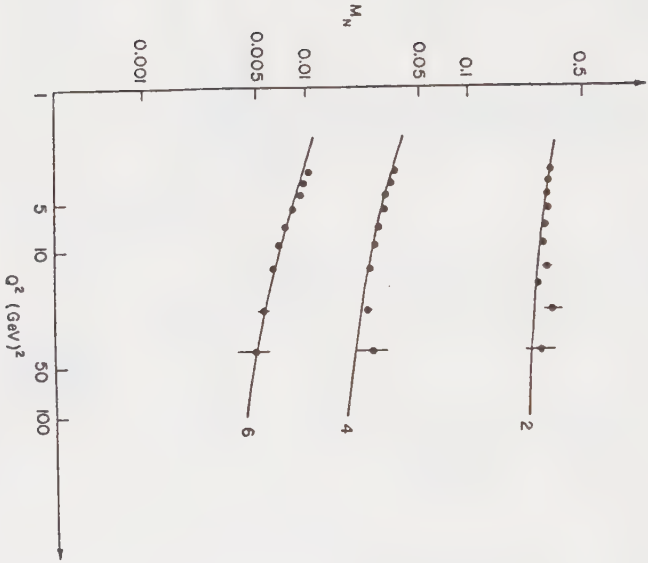
Figur [10]: Vergleich von Quark-Parton-Vorhersagen des Dreilepton-Prozesses mit dem Experiment



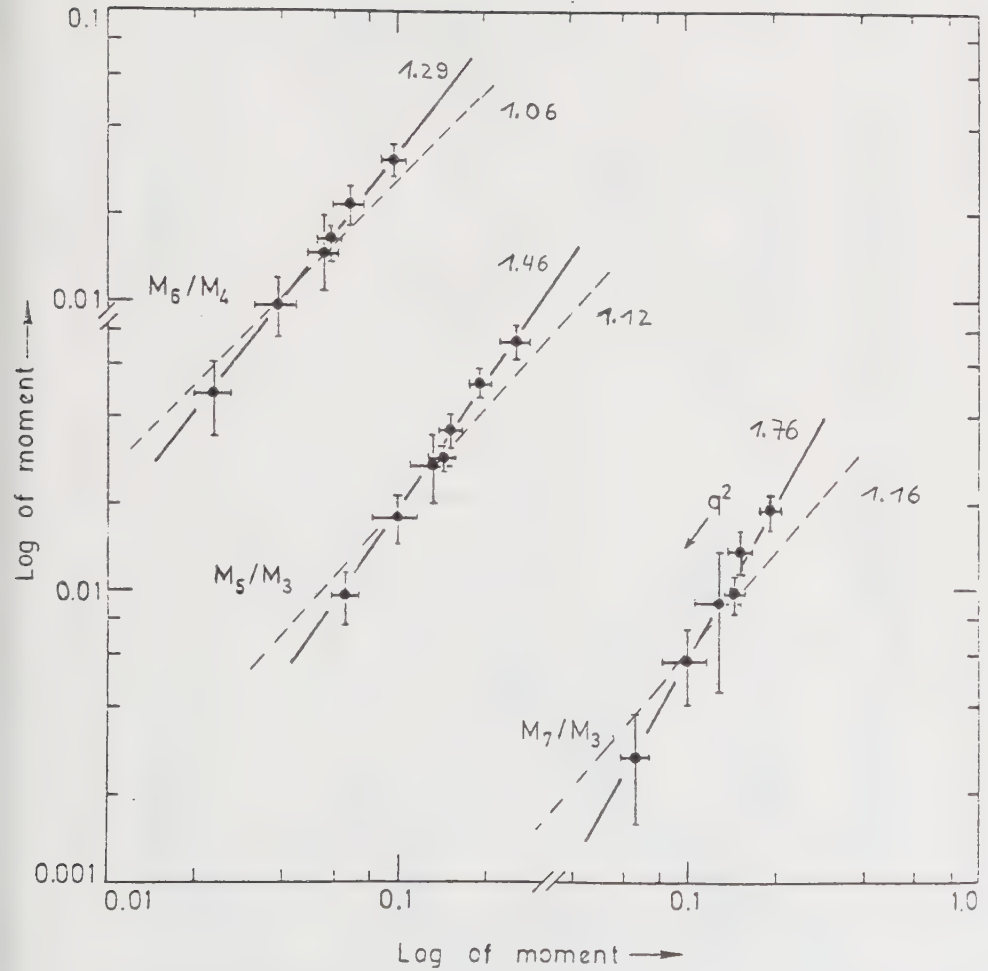
Figur [11]: Impulsabhängigkeit der Strukturfunktion $F_2^{\nu N}(x, q^2)$ für verschiedene Werte von x .



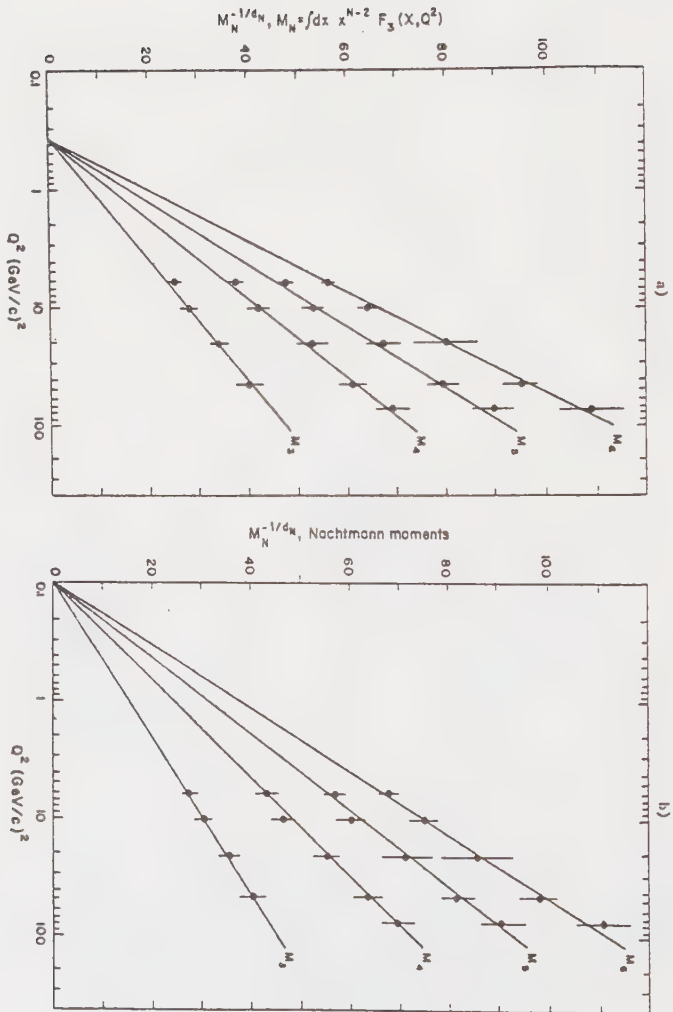
Figur [12]: Fit der Impulsabhängigkeit von $F_2^{\nu N}(x, q^2)$ für $x \approx 0$ durch [V.5.3]



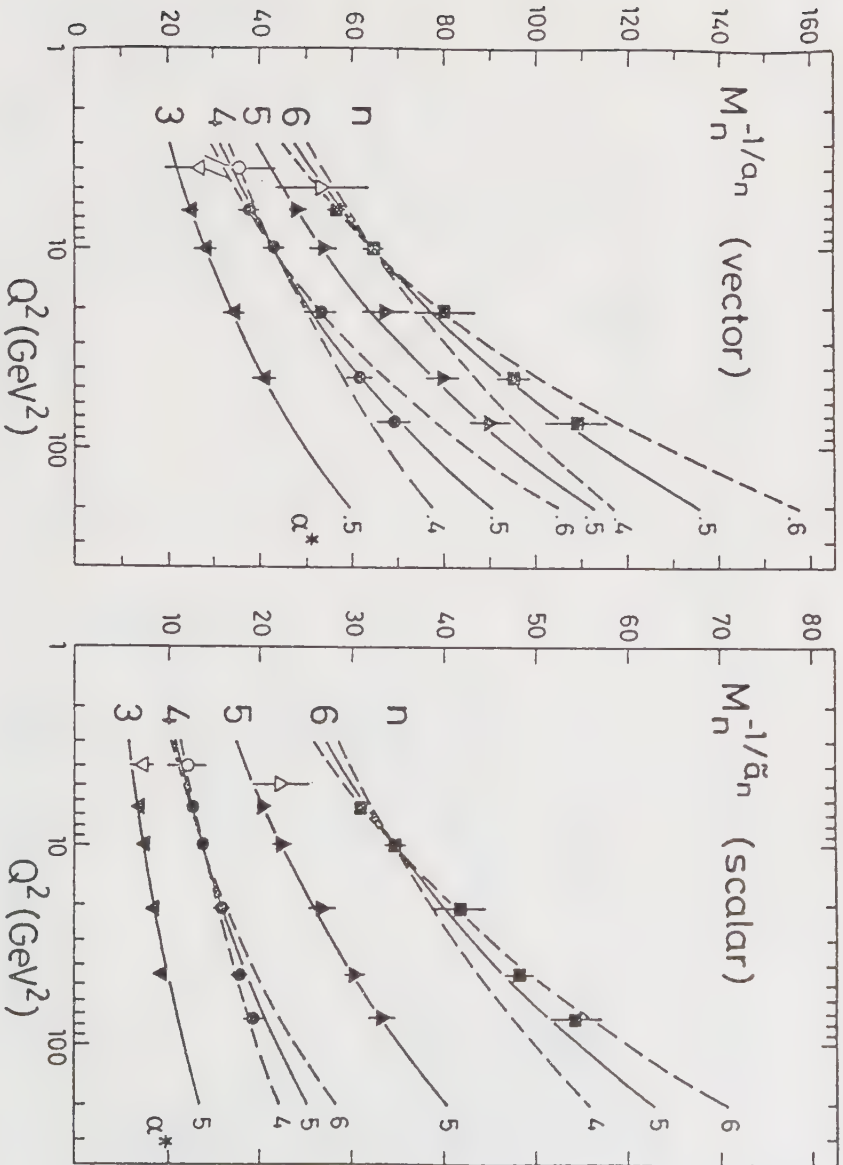
Figur [13] : Fit der Impulsabhängigkeit der Momente und Strukturfunktionen im Rahmen des Modells von [V.5.3]



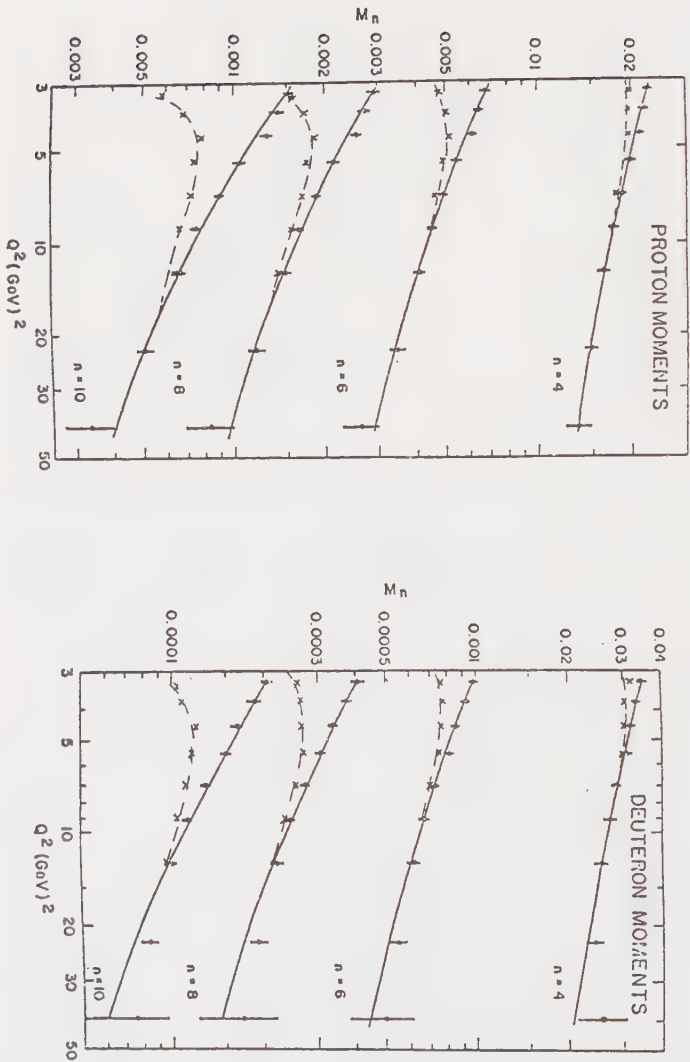
Figur [14]: Verhältnis der Logarithmen der Momente für Vektorgluonen (—) und skalare Gluonen (-----)



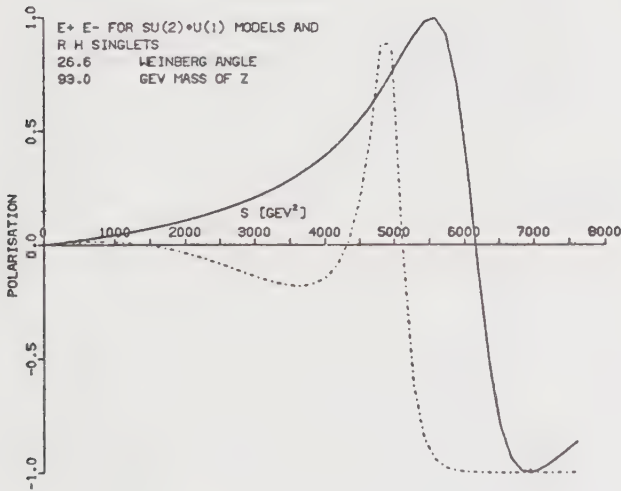
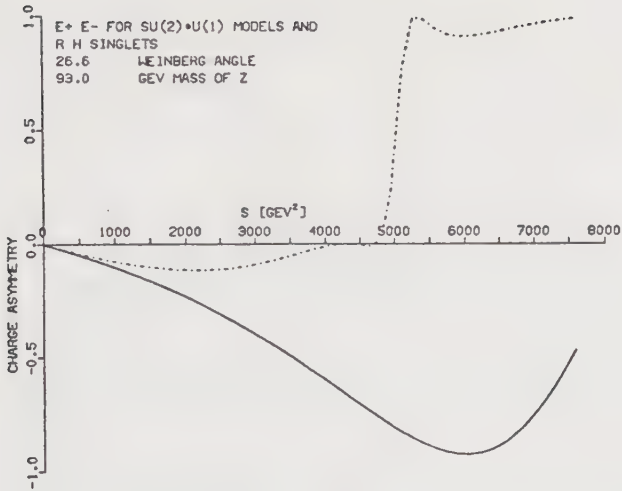
Figur [15]: QCD-Fits der Impulsabhängigkeit der Momente



Figur [16] : Fits der Impulsabhängigkeit der Momente in Fixpunkttheorien mit skalaren bzw. Vektor-Gluonen



Figur [17]: Impulsabhängigkeit der Momente mit (—) und ohne (---) Einbeziehung des elastischen Kanals



Figur [18]: Ladungsasymmetrie und Polarisation für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
 im Weinberg-Salam Modell (—) und für $M_L = M_Z$ (----) .
 Effektiver Weinberg-Winkel in beiden Fällen $\sin^2 [\theta_L(0)] = 0.2$

Lebenslauf

Am 2.11.1949 wurde ich in München als Sohn des kaufmännischen Angestellten Herbert Schneider und seiner Ehefrau Anna Schneider, geborene Banas, geboren.

Von 1956 bis 1961 besuchte ich die Volksschule in München-Allach. 1961 trat ich in die Oberrealschule in München-Pasing ein, die später als Max-Planck-Gymnasium fortgeführt wurde. 1970 legte ich mein Abitur ab.

Im Wintersemester 1970/71 begann ich das Studium der Physik an der Ludwig-Maximilian-Universität in München und legte dort im Sommersemester 1972 das Vordiplom ab.

Anschließend fertigte ich unter der Anleitung von Professor H.P. Dürr am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München meine Diplomarbeit mit dem Thema "Zur Wilson-Entwicklung des Produktes dreier Feldoperatoren" an. Im Frühjahr 1976 legte ich die Diplomprüfung für Physik ab.

Seitdem bin ich als Doktorand am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München.

